常葉大学研究紀要（教育学部）
第35号　　2015.3.　　109頁～ 120頁

中学校数学の背景にある幾何学

笛　木　茂　雄

Geometry in the Context of Junior High School Mathematics

Shigeo FUEKI

2014 年 11 月 21 日受理

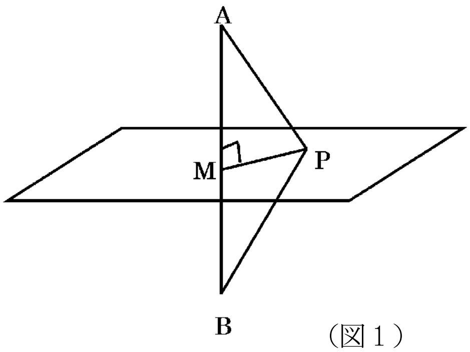
1.　はじめに

数学において一つの理論体系の構成法は一つでなく、 基礎におく考え方や立場、 重視する事項等に応じて様々な方法がある。５つの公準から積み上げ、一つの大きな数学体系を構成しているユークリッド幾何学は、公理から一つ一つ積み上げていく論理の構成や数学の厳格さを学ぶには非常に優れ、中学校・高等学校での図形指導でも中心的な役割を演じている。E. Fischbein は、図形の論証の学習で用いられる「図」には抽象的で、理想化された、形式的に記述できる実体と感覚によって捉えられた図的な諸性質からなる実体とがあることを、そして、この二重の実体が共存したものをわれわれは幾何学的実体としてとらえていることを指摘している。本論文は、図形指導での「感覚と実証」を意識し、図形指導で登場するであろう具体的な問を中心に構成し、基本定理の確認（その構成方法と適用例）と立方体の切断面の基本作図法の作成をする。

2.　3 次元空間内の図形をとらえる（多面体）；　二次元から三次元へ

平面上で、２つの定点A、Bから等距離になる点Pの集合は線分ABの垂直二等分線である。空間で２つの定点A、Bから等距離にある点Pの集合（軌跡）はどのような図形であるか？

この問の答えは、A、Bを含む任意の平面上で点Pの軌跡は線分ABの垂直二等分線である。従って、求める軌跡はABを軸としてその垂直二等分線を１回転してできる平面である。(図１を参照)



（図１）

このように、二次元から三次元を考察していく。ここでの多面体というのは、いくつかの平面で囲まれてできるものである。

平面上の三角形に当たるものとしては、四面体が考えられる。これは４つの三角形で囲まれた立体で、三角錐ともみられる。ここでは、４つの頂点A、B、C、Dを使って四面体ABCDなどと表す。ここで、任意の三角形ABCに外接円が存在するように、四面体のもつ基本的な性質を見てみよう。

四面体の基本的な性質

⑴　４つの頂点を通る球面は１つある。

⑵　四面体の中にあって４つの面に接する球面は１つある。

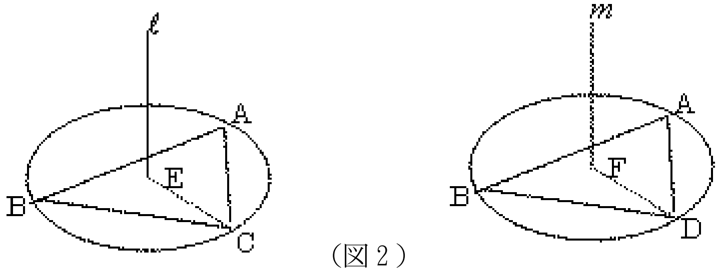
⑶　各頂点と対する面である三角形の重心を結ぶ４つの線分は１点で交わり、ここで３：１の比に分けられている。

特に⑴の球を四面体の外接球、その中心を外心という。⑵の球を四面体の内接球、その中心を内心という。⑶の点を四面体の重心という。ここで上の性質⑴の成立を確認する。

定理　四面体ABCDには外接球が存在する。

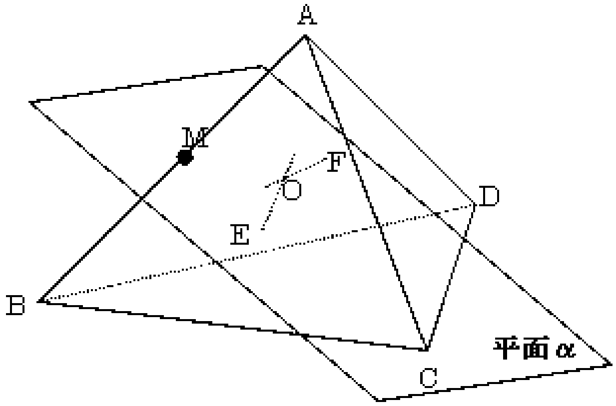
略証明：２頂点A、Bの中点をMとし、Mを通り直線ABに垂直な平面（垂直二等分平面）αを考える。（αは２点A、Bからの距離が等しい点の集合である。）

△ABCの外心をEとし、Eを通り△ABCに垂直な直線をℓとする。△ABDの外心をFとし、Fを通り△ABDに垂直な直線をmとする（図２を参照）。



（図２）

ℓ 上の点は 3 点A、B、Cから等距離にあるので、ℓ は平面上にある。m 上の点は 3 点A、B、Dから等距離にあるので、m は平面 α 上にある。平面ABCと平面ABDは平行でないので ℓ と m も平行でない。ゆえに ℓ と m は平面 α 上で交わる。交点を O とすれば、O は 4 頂点から等距離にあり、四面体の外心である。

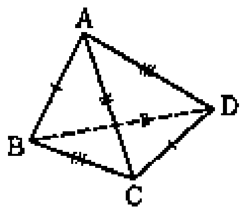


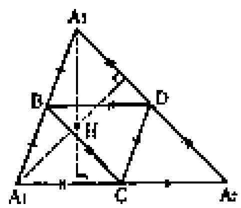
（図 3 ）　＜証明終了＞

このように、外心は面である 4 つの三角形の外心を通ってこの平面に垂直な 4 つの直線の交点である。また、 6 つの辺の垂直二等分平面の交点になっている。同様にして、性質(2)と(3)が成り立つことも分かる（証明は省略する）。

三角形には、外心、内心、重心の他に垂心もあるが、四面体には一般にこうしたものはない。つまり、一般に各頂点から対面へ下した垂線は一点で交わらないのである。 平面上で、正三角形に当るものとしては、空間では正四面体が考えられるが、もっと広く次の様なものが考えられる。

四面体ABCDで、AB=CD、AC=BD、AD=BC のときは、各面が合同で、展開図としては、図 4 に示したようなものが得られる。これを等面四面体という。





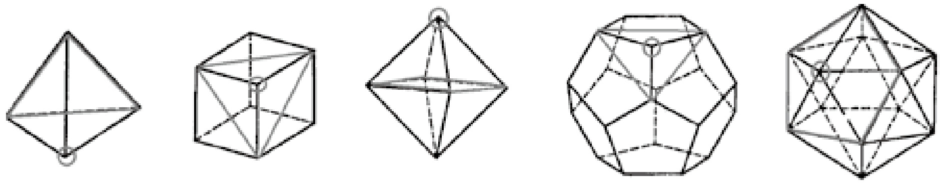
（図 4 ）

凸多角形とその平面上にない点 O があるとき、O からこの多角形の辺上を通るすべての半直線を引いてできる図形を多面角といい、凸多角形が n 角形のと

き n 面角という。n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ と点 O でできる多面角 $O-A_1A_2\cdots A_n$ で、$\angle A_1OA_2$、$\angle A_2OA_3$、…、$\angle A_nOA_1$ を面角という。

m、n を自然数とする。正多面体とは、各面が正 m 角形で、各頂点での面角がすべて n 面角であるような凸多面体である。

正六面体は、各面が正方角形で、各頂点での面角がすべて三面角である。正十二面体は、各面が正五角形で、各頂点での面角がすべて三面角である。



（図５）

面角については次のことが成り立つ（証明は省略する）

定理　三面角で、１つの面角の大きさは、他の２つの面角の和より小さい。

定理　多面角で、すべての面角の和は 360°より小さい。

正多面体とは、各面が正の m 角形で、各頂点での面角がすべて n 面角であるような凸多面体である、この自然数 m、n の取り得る値は何か？

この問に関し、すべての面角の和は

$$180°(m-2)n／m$$

と表され、すべての面角の和は 360°を超えないから、

$$180(m-2)n < 360m \Leftrightarrow n(m-2) < 2m \Leftrightarrow (m-2)(n-2) < 4$$

自然数 m、n で、$m \geqq 3$、 $n \geqq 3$ であるから、$(m, n) = (3, 3), (3, 4), (3, 5)$ $(4, 3), (5, 3)$ である。

多面体については、次のオイラーの定理が著名である。

定理　多面体で、頂点の数が ν、辺の数が e、面の数が f であると、

$$\nu-e+f = 2$$

略証明：　一つの面をはずして残る部分を平面上に（押し拡げる）拡げて考える。次の $\nu-e+f$ の値を変化させない 操作①と操作②で、平面上の図（グラフ）を変形していく。

操作①　外側から１つずつ辺を取り外していく、そのとき頂点は削らない。
（操作①をする度に、辺数、面数ともに１つずつ減る：$\nu-e+f$ の値は変わらない）

操作②　外側から１つの頂点とそれとつながる１つの辺を取り外していく、そのとき面は削らない。
（操作②をする度に、頂点数、辺数とみに1つずつ減る：$\nu-e+f$ の値は変わらない）

操作①と操作②を必要なだけ適宜繰り返せば、の最後には頂点１つだけからなるから

$$\nu-e+f=1-0+0=1$$

のように、平面上の図（グラフ）においては、$\nu-e+f$ の値が１であることが分かる。元の凸多面体はから一つの面を取り除いて平面上の図（グラフ）を作成していたから、凸多面体については、$\nu-e+f=1+1=2$

＜証明終了＞

　このオイラーの定理により、多面体の存在が確認できる。例えば、凸多面体の頂点数が100、辺数が148、面数が51という多面体は存在するのだろうか？　もし存在したならば、オイラーの定理により

$$\nu-e+f=2$$

を満たす。しかし、この多面体は

$$\nu-e+f=100-148+51=3$$

である。これは矛盾、即ち、頂点数が100、辺数が148、面数が51という多面体は存在しないのである。
　オイラーの公式 $\nu-e+f=2$ を満たす、頂点・辺・面の数を持つ凸多面体は必ず存在するのだろうか？　例えば、頂点数が100、辺数が149、面数が51なる凸多面体は存在するのか？　この場合、多面体の構成（辺数と頂点数の関係）に着目しなければならない。１つの辺の両端には頂点がある、つまり、１つの辺と２つの頂点が対応している。凸多面体の各頂点には３本以上の辺が集まるから、辺数による比較（全体の辺数を重複して数えたもの）を考えれば、

$$2\times\text{辺数}\quad\geqq\quad\text{頂点数}\times 3\ (\text{本})$$

即ち、

$$2e\geqq 3\nu$$

である。頂点数が100であれば、$e\geqq 150$、辺数は150以上でなけらばならない。従って、頂点数が100、辺数が149、面数が51なる凸多面体は存在しないのである。

それでは、頂点数が20、辺数が60、面数が42なる凸多面体なる存在するか？この場合は、オイラーの公式$\nu-e+f=2$も、辺数と頂点数の関係$2e \geqq 3\nu$も満たしている。存在の確認のために、さらにもう一つの多面体の構成（辺数と面数の関係）に着目しなければならない。隣り合う２つの面は、１つの辺を共有している、つまり、１つの辺と２つの面が対応している。凸多面体の各面には、３本以上の辺があから、辺数による比較（全体の辺数を重複して数えたもの）を考えれば

$$2\times\text{辺数} \geqq \text{面数}\times 3\ (\text{本})、$$

即ち、

$$2e \geqq 3f$$

である。面数が42であれば、$e \geqq 63$、辺数は63以上でなけらばならない。従って、頂点数が20、辺数が60、面数が42なる凸多面体は存在しないのである。

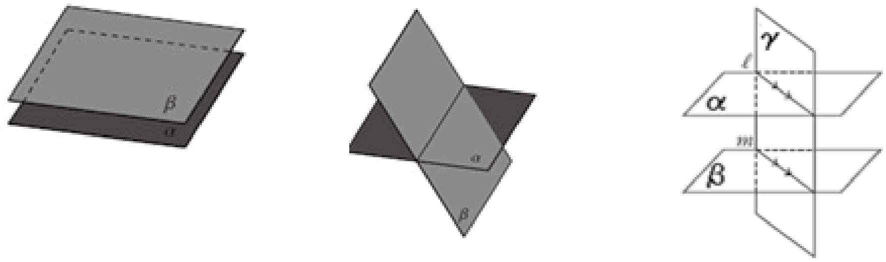
このように、オイラーの公式は必要条件であることをとらえ、多面体の構成に着目しなければならない。

3. 3次元空間内の図形をとらえる（切断）； 三次元から二次元へ

数学では表記することが不可欠であるが、空間図形の考察では常に表記をどうするかが問題とされる。平面図形の場合、図を紙にかくこと自体が表記であることが多い。しかし、空間図形では、そこに、投影、切断、展開などの操作が必要となる。ここで展開とは、立体の表面を一つの平面上にひろげる操作のことをいう。展開図は展開された図面である。展開図の用途としては、板金加工、衣服製作とうがあげられる。図法幾何学では材料の厚さ、張り合わせは議論しない。

・平面と平面との交わり（その作図を通してとらえる ）。

異なる２平面α, βの位置関係には、次の２つの場合がある。

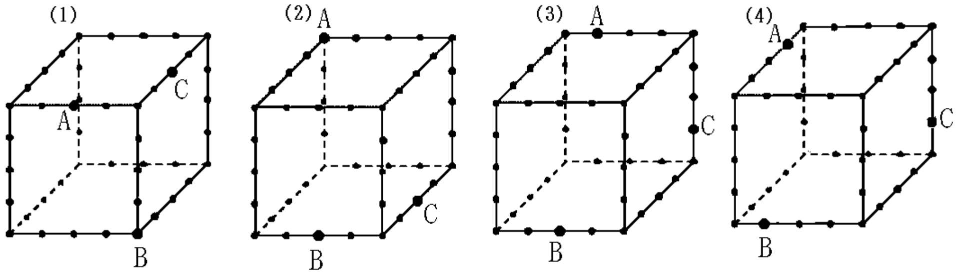


（図６）

1）平面と平面が交わるとき、その交線は直線になる。
2）平行な２つの平面α, βにある平面γが交わるとき、２つの交線ℓ, mは平行になる。

なぜならば、空間内の交わらない２つの平面を平行な平面という。平行な２つの平面に１つの平面γが交わる時、交わりの直線ℓ, mは１つの平面γ上にあって交わることがない。つまり、$\ell \parallel m$である。

次の⑴から⑷のそれぞれの図７で、大きな相異なる３点A、B、Cを通る平面で立方体を切断した場合の、切り口（切断面）の線をはどうなるのか？ただし、各辺はすべて４等分されているとする。



（図７）

ここでは、３つの公理１から公理３をおき、作図の基本操作を作ることとする。

公理１：（結合の公理）相異なる２点を通る直線はただ一つある。

相異なる２点A、Bを通る直線を直線ABとする。

公理２：２点A、Bが平面π上にあるとき、直線AB上の点はすべて平面π上にある。

公理３：一直線上には、相異なる少なくとも二点がある。平面上には同一直線上にない少なくとも三点がある。

立方体の辺上の与えられた相異なる同一直線上にない３点P、Q、Rを通る平面で切断する場合の基本操作：

立方体の一面をαとし、その対面（平行な面）をβとする。 また、αと交わる面（切断面）をγとする。(図８を参照)

基本操作①

α上に与えられた２点Q、Rがあれば、それらを結ぶ線をℓとする。ℓは切り口線（ℓはαとβの交線）となる。

なぜならば、２点Q、Rは、２平面αとγとの両方の上にある。公理２によって、直線ℓはαとγとの両方の上にある直線である。したがってℓはαとγの交線である。

基本操作②

α上ではℓと交わらない立方体の辺n（$\ell /\!/ n$でない）に対して、nを延長した直線$\tilde{n}$を作図しℓとの交点Sを作図する。このとき、Sは２平面αとγとの両方の上にある。なぜならば、ℓと$\tilde{n}$は平行ではないので交わり、その交点であるSは、ℓがαとγの交線であるから、２平面αとγとの両方の上にある。

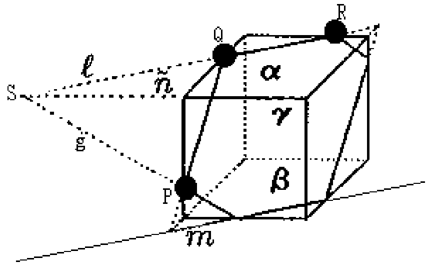
基本操作③

基本操作②の点SとPを通る直線を引く。

２点S、Pを通る直線gは、公理２よりγ上にある。ℓとgとの交点は、その２平面の交線（共通辺の延長直線$\tilde{n}$）上で必ず交わる。

基本操作④

必要に応じてα上の切り口線ℓに対してβ上で平行な切り口線mを作図する。なぜなら、異なる二平面の位置関係で示したように、α、βどうしに切り口の線ℓとmがあるとき、それらは平行になる。

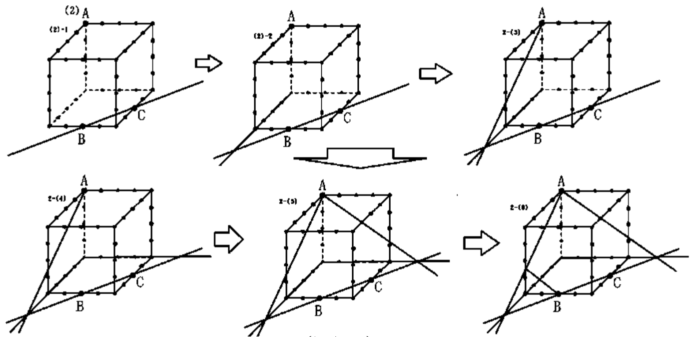


（図８）

これらの基本操作を組み合せて、立方体の面上における切り口線を見つけ、それらを結ぶことで切断面が作図により求められる。

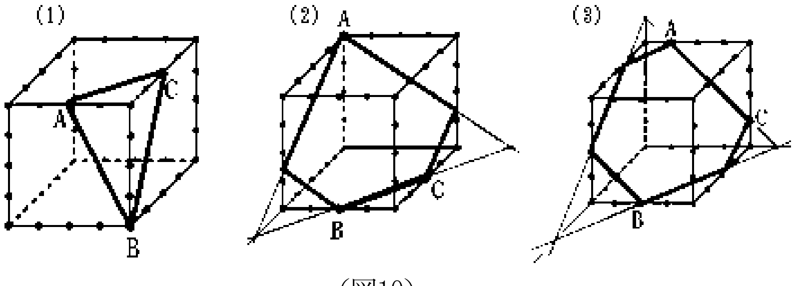
⑴は、３点A、B、Cのどの２点も立方体の同一平面上に位置しているので、基本操作①を駆使して、２点AとB、２点BとC、２点CとAをそれぞれ結んだものとなる。

⑵は、２点B、Cが立方体の同一平面上にあるので、基本操作①を用いて直線BCを引く。この直線BCに対して基本操作②より、立方体の辺を延長した直線との交点を求めていく。



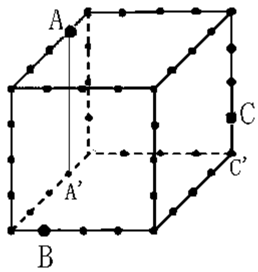
（図９）

⑶は、２点B、Cが立方体の同一平面上にあるので、基本操作①を用いて直線ACを引く。後は⑵と同様に、基本操作②、基本操作③、基本操作④を使い作図すれば良い。



（図10）

⑷は、3点A、B、Cのどの2点も立方体の同一平面上に位置していないので、基本操作①は使用できない。例えば、図11のようにAから垂線を下したその足をA'とし、Cから垂線を下ろしたその足をC'とする。



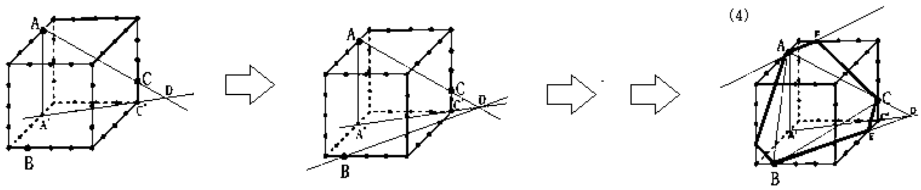
（図11）

そのとき、平面AA'C'Cと求める切断面との交線について考えれば良い。

平面AA'C'C上で、線分AA'の長さと線分CC'の長さは異なるので、直線ACと直線A'C'を交わる。その交点をDとする（図12を参照)。

Dは直線AC上にあるから、公理２より、求める切断面上にある。また、Dは直線A'C'上の点であるから、公理２によって立方体の底面を延長した平面A'BC'上にもある。従って、求める切断面上の２点B、Dは（立方体の底面を延長した）同一平面上にある。つまり、基本操作①が使用できるのである。

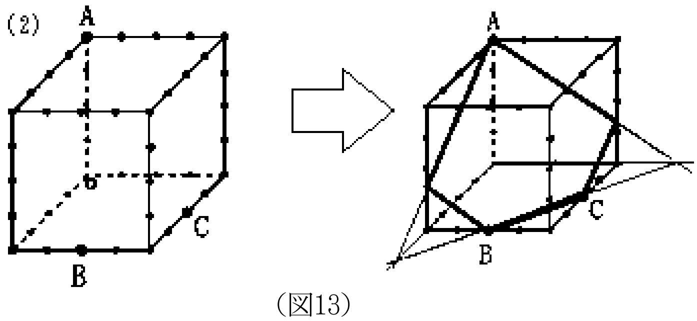
後は、必要に応じて基本操作①、基本操作②、基本操作③、基本操作④等を適宜使用し作図すれば良い。



（図12）

・平面と平面との交わり（その解析作業を通してとらえる)。

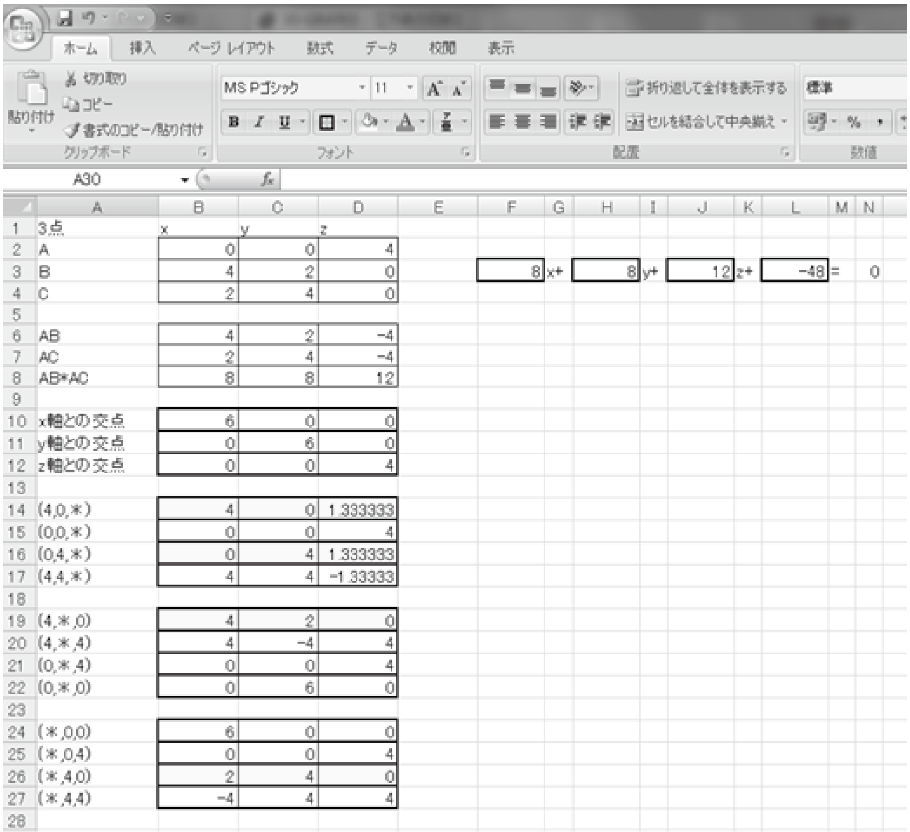
直交座標系をとり、切断面の方程式を計算する。解析幾何等の諸公式を用いれば、例えば、⑵において、座標：A(0、0、4)、B(4、2、0)、C(2、4、0）とし、切断面の方程式：$8x+8y+12z-48=0$ と計算できる。



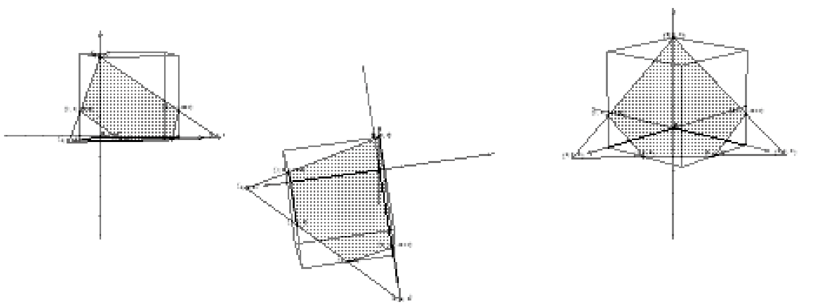
（図13）

計算結果（解析結果）を用いて、同一直線上にない三点により決定される切断面の幾何学情報の獲得・習得に関し、実践構築的な描画ソフトでの図形構築の練習もある程度有効である。今回、表計算ソフト（エクセル）を使いワークシートを自作し、描画ソフト（3D GRAPES）http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/を使用し、図13に描画例を示した（図14参照)。

描画例］：



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	3点	x	y	z										
2	A	0	0	4										
3	B	4	2	0		8	x+	8	y+	12	z+	-48	=	0
4	C	2	4	0										
5														
6	AB	4	2	-4										
7	AC	2	4	-4										
8	AB*AC	8	8	12										
9														
10	x軸との交点	6	0	0										
11	y軸との交点	0	6	0										
12	z軸との交点	0	0	4										
13														
14	(4,0,*)	4	0	1.333333										
15	(0,0,*)	0	0	4										
16	(0,4,*)	0	4	1.333333										
17	(4,4,*)	4	4	-1.33333										
18														
19	(4,*,0)	4	2	0										
20	(4,*,4)	4	-4	4										
21	(0,*,4)	0	0	4										
22	(0,*,0)	0	6	0										
23														
24	(*,0,0)	6	0	0										
25	(*,0,4)	0	0	4										
26	(*,4,0)	2	4	0										
27	(*,4,4)	-4	4	4										
28														



（図14）

少しローテク・非常に地味で初歩的な技術であるが、基本事項を組み込み得られるという意味で、学習を反映できる。

4. おわりに

直観力を鍛え、論証する力を磨くためにも、出来るだけ長く幾何学的な構造物体に親しむ時間のゆとりも必要なのかもしれないと考え、今回のテーマ「2次元から3次元へ、3次元から2次元へ」を扱った。拝借した描画ソフトは、視点をぐるりと動かすことが出来とても参考になった。時間のたつのも忘れて描画ソフトと格闘した。低次元と高次元との間の関係性に着目する諸兄先生方の試みは、多くの興味深い幾何学資産を生み出している。これらを詳細に分析し、また、発展させることが一つの教育的な課題でもあるように思う。

参考文献

[1] 安藤清・佐藤敏明　「新数学入門シリーズ4 初等幾何学」 森北出版（1999）
[2] Peter Frankl・前原潤　「やさしい　幾何学問題ゼミナール」共立出版（1993）
[3] Robin Hartshorne 「Geometry: Euclid and Beyond」Springer（2000）
[4] 一松信　　「基礎数学叢書1　数学概論」新曜社（1990）
[5] 岩田至康　「幾何学大辞典 1 基本定理と問題（平面）」槇書店（1993）
[6] 栗田稔　　「教職数学シリーズ　基礎編2　幾何」共立出版（1981）
[7] 難波誠　　「平面図形の幾何学」　現代数学社（2008）
[8] 大野栄一　「定木とコンパスで挑む数学　四則演算から作図不能問題まで」講談社（1933）
[9] 佐々木元太郎　「現代数学レクチャーズ A-5 ユークリッド幾何」培風館（1994）
[10] 数学教育学研究会　「新数学教育の理論と実際」聖文社　（1994）
[11] 持田辰郎　「自然の幾何学によるがごとく―デカルトの感覚論・4 ―」名古屋学院大学論集　人文・自然科学篇　第45巻　第1号（2008）
[12] 橋本是浩/風間喜美江「中学校図形における論証導入期の指導について」大阪教育大学紀要 第V巻 第2号（1996）
[13] E. Fischbein 「The Theory of Figural Concepts」Educational Studies in Mathematics 24、pp、139-162（1993）
[14] 佐治健太郎 「変換群の考え方による中学校・高校における平面幾何の構成」岐阜数学教育研究　2011、 Vol. 10、 119-127