常葉大学教育学部紀要
第36号　　2016.3.　　333頁～ 342頁

数学クイズを題材とした集合論的数え上げと評価の最良性についての講座

井　出　　　学

Lecture on Set-theoretic Enumeration and Best-possible Estimation via Mathematical Quiz

Manabu IDE

2015 年 11 月 12 日受理

抄　　録

本稿は平成25年２月９日（土）に行われた研修センターゼミ２日目「体験学習活動（おもしろ算数教室）」についての報告および講義録である。本講座では一年次後期に学習する集合論を復習し、集合論を用いて、有名な数学クイズである「分銅問題」の解答および証明を与えた。

キーワード：集合と写像，集合論的数え上げ，最良評価，天秤分銅問題，数学クイズ

１　はじめに

本稿は平成25年２月９日（土）に行われた研修センターゼミ２日目「体験学習活動（おもしろ算数教室）」についての報告および講義録である。同じ内容の講義を平成25年度および平成26年度の研修センターゼミで行っている。

本講座では後述する数学クイズの中で有名な分銅問題を題材を通じて、一年次後期選択科目の基礎数学演習Bで学習する集合論を簡単に復習し、集合論が特に数え上げの分野においてどのように使われているか、その基本的な使い方を学び、集合論の利便性を知ることが今回の講義の第一の目的である。

また数学的な量の大きさを評価するとき、その評価が最良（best possible）なものであるかどうかを調べることは非常に重要である。しかし学校教育の中でそのような問題に出会うことは稀であり、学生はその重要性を十分認識していない。今回の題材でもそのような評価が現れ、それが最良であることを示すことが問題を解く鍵となっている。評価の最良性を理解し、技術として体得させることも目的の一つである。

2　題材

受講者に以下のプリントを講義前日に配布し、当日までに目を通し少しでも問題を考えておくように指示した。

考えてみよう数学クイズ

問.　3個の分銅と天秤を用いて1g刻みに

$$1\,g,\ 2\,g,\ 3\,g, \cdots, N\,g$$

の物体を計れるようにしたい。Nを最大にするには3個の分銅の重さをそれぞれ何gにすればよいだろうか?またそのときのNの値は？

例えば1g，2g，5gの分銅を使えば、当然1g，2g，5gの物体を計ることは出来る。更に5gの分銅と2gの分銅を天秤の両側に置くことで3gの物体を計ることも出来る。同様に4gのものも計ることが出来る。また1gの分銅と5gの分銅を天秤の同じ側に置くことで6gの物体を計ることが出来る。同様に7gの物体も計ることが出来る。また全ての分銅を同じ側におけば8gの物体も計ることが出来る。9g以上のものを計るのはこの3個の分銅たちでは無理である。よって1g，2g，5g の分銅を用いたときは$N = 8$である。（ちなみに$N = 8$は3個の分銅での最大値ではない）

問.　上の問題をn個の分銅の場合に拡張して考えよ。

この問題は筆者は友人から聞いて知ったものであったが、[N] にも記述があり昔からよく知られた問題であるようだ。

3　グループワーク（10：00～10：30）

以下において3つの分銅の重さをW_1，W_2，W_3（$W_1 \leqq W_2 \leqq W_3$）とする。

まず初めの30分は1グループ約6人の5つのグループに分け、グループで問題及び解答の方針を考えさせた。15分ほどでいくつかのグループで$n = 3$のときの解答（$W_1 = 1$，$W_2 = 3$，$W_3 = 9$ のとき $N = 13$）が出てきたので、解答を発表し、本当にそれでよいのか考えさせた。10：25になるといくつかのグループにおいて、3個の分銅で計れる重さの種類が高々13種類であり、$W_1 = 1$，$W_2 = 3$，$W_3 = 9$ のとき 1, 2, 3,⋯, 13 の重さを実際計れることが確かめることが出来た。その後残り時間で$n = 4$のときにその考えを拡張出来るか、nが一般のときでも同じことが出来るかを考えさせた。2グループにおいて、一般のnについての解答（$W_1 = 1$，$W_2 = 3$，$W_3 = 3^2$，⋯，$W_n = 3^{n-1}$）に辿り着くことが出来た。

4　$n=3$ のときの解答と一般の n についての指針（10：30〜10：40）

3つの分銅の重さをそれぞれ W_1, W_2, W_3（$0 < W_1 \leqq W_2 \leqq W_3$）とする。このときこの3つの分銅で計れる重さは W_1, W_2, W_3 の加減で表される数である。例えば、重さを計る物体を天秤の左の更に乗せることにし、右の皿に W_1, W_3 の分銅、左の皿に W_2 の分銅を乗せることにすると、

$$W_1 - W_2 + W_3 = 1\cdot W_1 + (-1)\cdot W_2 + 1\cdot W_3$$

の重さのものを計ることが出来る。右の更に W_1, W_2 の分銅を乗せ、W_3 の分銅を使わなければ、

$$W_1 + W_2 = 1\cdot W_1 + 1\cdot W_2 + 0\cdot W_3$$

の重さのものを計ることが出来る。ところで W_1, W_2, W_3 の加減で表される数で、正になりうるものは

$$\begin{aligned}
W_1 &= 1\cdot W_1 + 0\cdot W_2 + 0\cdot W_3\\
W_2 &= 0\cdot W_1 + 1\cdot W_2 + 0\cdot W_3\\
W_3 &= 0\cdot W_1 + 0\cdot W_2 + 1\cdot W_3\\
W_1 + W_2 &= 1\cdot W_1 + 1\cdot W_2 + 0\cdot W_3\\
W_2 + W_3 &= 0\cdot W_1 + 1\cdot W_2 + 1\cdot W_3\\
W_3 + W_1 &= 1\cdot W_1 + 0\cdot W_2 + 1\cdot W_3\\
W_1 + W_2 + W_3 &= 1\cdot W_1 + 1\cdot W_2 + 1\cdot W_3\\
W_3 - W_1 &= (-1)\cdot W_1 + 0\cdot W_2 + 1\cdot W_3\\
W_3 - W_2 &= 0\cdot W_1 + (-1)\cdot W_2 + 1\cdot W_3\\
W_2 - W_1 &= (-1)\cdot W_1 + 1\cdot W_2 + 0\cdot W_3\\
W_1 + W_2 - W_3 &= 1\cdot W_1 + 1\cdot W_2 + (-1)\cdot W_3\\
W_2 + W_3 - W_1 &= (-1)\cdot W_1 + 1\cdot W_2 + 1\cdot W_3\\
W_3 + W_1 - W_2 &= 1\cdot W_1 + (-1)\cdot W_2 + 1\cdot W_3\\
W_3 - W_1 - W_2 &= (-1)\cdot W_1 + (-1)\cdot W_2 + 1\cdot W_3
\end{aligned}$$

の14通りである。しかしここで $W_1 + W_2 - W_3$ と $W_3 - W_1 - W_2$ は同時に正には成り得ないのでこれを除く必要がある。従って W_1, W_2, W_3 の加減で出来る正の数は高々13通りである。その13通りの数が 1, 2, 3, …, 13 となる保証はまだないが、$n=3$ のとき N の値は高々13で押さえられることは分かった。もし $N=13$ を実現出来るよう

な組（$W_1,\ W_2,\ W_3$）が見つかれば、それで問題は解決したことになる。もしそのような組が見つからなければ（存在しなければ）$N \leqq 12$ であり、次は $N = 12$ を実現するような組を探せばよい。今回我々は $W_1 = 1,\ W_2 = 3,\ W_3 = 9$ により $N = 13$ を実現出来た。実際、

$$\begin{array}{ll} 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot 3 + 0\cdot 9 & 2 = (-1)\cdot 1 + 1\cdot 3 + 0\cdot 9 \\ 3 = 0\cdot 1 + 1\cdot 3 + 0\cdot 9 & 4 = 1\cdot 1 + 1\cdot 3 + 0\cdot 9 \\ 5 = (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 3 + 1\cdot 9 & 6 = 0\cdot 1 + (-1)\cdot 3 + 1\cdot 9 \\ 7 = 1\cdot 1 + (-1)\cdot 3 + 1\cdot 9 & 8 = 0\cdot 1 + (-1)\cdot 3 + 1\cdot 9 \\ 9 = 0\cdot 1 + 0\cdot 3 + 1\cdot 9 & 10 = 1\cdot 1 + 0\cdot 3 + 1\cdot 9 \\ 11 = (-1)\cdot 1 + 1\cdot 3 + 1\cdot 9 & 12 = 0\cdot 1 + 1\cdot 3 + 1\cdot 9 \\ 13 = 1\cdot 1 + 1\cdot 3 + 1\cdot 9 & \end{array}$$

である。

一般の n のときでもこのように、n 個の分銅で実現できる正の数の個数の最大値を計算し、その最大値を実現する組（$W_1,\ W_2,\ \cdots,\ W_n$）を発見するのが方針である。

5　集合論の復習と準備（10：40〜11：00）

定義. $f: X \to Y$ を写像とする。

$$\begin{aligned} f(X) &:= \{f(x) \mid x \in X\} \\ &= \{y \in Y \mid {}^{\exists}x \in X,\ y = f(x)\} \end{aligned}$$

を f による X の像と呼ぶ。

定義. $f: X \to Y$ を写像とする。

(1)　f が単射　$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$　${}^{\forall}x,\ x' \in X(x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$

　　　　　　$\overset{\text{待遇}}{\Longleftrightarrow}$　${}^{\forall}x,\ x' \in X(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

(2)　f が全射　$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$　${}^{\forall}y \in Y,\ {}^{\exists}x \in X,\ y = f(x)$

　　　　　　$\Longleftrightarrow$　$f(X) = Y$

定理 1． $X,\ Y$ を有限集合とし、その元の個数をそれぞれ $\sharp(X),\ \sharp(Y)$ とする。

(1)　X から Y への単射が存在すれば $\sharp(X) \leqq \sharp(Y)$。

(2)　X から Y への全射が存在すれば $\sharp(X) \geqq \sharp(Y)$。

(3)　X から Y への全単射が存在すれば $\sharp(X) = \sharp(Y)$。

証明. 省略。

定理 2． $f: X \to Y,\ g: Y \to Z$ を写像とする。

(1)　合成 $g \circ f: X \to Z$ が単射ならば f は単射である。

(2)　合成 $g \circ f: X \to Z$ が全射ならば g は全射である。

証明. (1)　$g \circ f$ が単射であると仮定する。$x,\ x' \in X,\ f(x) = f(x')$ とする。このと

き $x = x'$ であることを示せばよい。まず $f(x) = f(x')$ であるので $g(f(x)) = g(f(x'))$、すなわち $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ である。よって $g \circ f$ の単射性より $x = x'$ を得る。従って f は単射である。

(2) $g \circ f$ が全射であると仮定する。$^\forall z \in Z$ とする。このとき $z = g(y)$ となる $y \in Y$ の存在を示せばよい。まず $g \circ f$ の全射性より $z = g \circ f(x)$ となる $x \in X$ が存在する。このとき $y = f(x)$ とおけば $y \in Y$ であり、$z = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y)$ である。よって g は全射である。

定義. 集合 X に対し、写像

$$X \to X,\ x \mapsto x$$

を X 上の恒等写像といい id_X で表す。（id_X は明らかに全単射であることに注意する）

系3． $X,\ Y$ を集合、$f: X \to Y,\ g: Y \to X$ を写像とする。もし $g \circ f = id_X$ かつ $f \circ g = id_Y$ ならば、f 及び g は全単射であり、g と f は互いに他の逆写像である。

証明. まず $g \circ f = id_X$ は単射であるので f は単射である。次に $f \circ g = id_Y$ は全射であるので f は全射である。従って f は全単射である。g が全単射であることもまったく同様である。さらに $g \circ f = id_X$ であること、すなわち

$$^\forall x \in X,\ g(f(x)) = x$$

であることは $g = f^{-1}$ であることそのものである。

以上を準備した。定理1及び定理2は集合論の基本的な定理であるが、本学の学生には定着してなく、少なくとも3年後期からの特別研究時に覚えている学生がほぼいないので、ここで復習する必要があると判断した。定理1の証明は時間の関係で省略したが、$\sharp(X)$ についての数学的帰納法により簡単に証明できる。また、以下の定理は使用したが、高校で学習する内容であり時間の関係もあり、講義内では紹介しなかった。

定理4． $X,\ Y$ を有限集合、$X \cap Y = \emptyset$ とすると

$$\sharp(X \cup Y) = \sharp(X) + \sharp(Y)。$$

6　解答及び証明（11：00～12：00）

n 個の分銅の重さを $W_1,\ W_2,\ \cdots,\ W_n$（$0 < W_1 \leqq W_2 \leqq \cdots \leqq W_n$）とする。重さを計る物体は天秤の左の皿に乗せるものとして、各分銅は左右どちらかの皿に乗せるか又はどちらにも乗せないように配置する。そのような分銅の配置に対して

$$a_k = \begin{cases} 1 & (k\ \text{番目の分銅を右の皿に乗せるとき}) \\ 0 & (k\ \text{番目の分銅を使用しないとき})\ (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \\ -1 & (k\ \text{番目の分銅を左の皿に乗せるとき}) \end{cases}$$

と定義する。このとき、この配置で計ることの出来る重さは
$$a_1W_1+a_2W_2+\cdots+a_nW_n$$
である。そこで集合
$$P=\left\{\sum_{k=1}^{n}a_kW_k \,\middle|\, a_k\in\{-1,\ 0,\ 1\},\ \ \sum_{k=1}^{n}a_kW_k>0\right\}$$
を考える。すなわち P は $W_1,\ W_2,\ \cdots,\ W_n$ を使って計ることが出来る正の重さの集合である。$\sharp(P)$ の上からの評価を与えるのが目標である。

$X=\{-1,\ 0,\ 1\}^n=\left\{(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) \,\middle|\, a_k\in\{-1,\ 0,\ 1\}\right\}$ を考える。これは分銅の配置全体のなす集合とみなすことが出来る。更に、
$$\sharp(X)=3^n \tag{1}$$
であることが明らかに分かる。X の部分集合 $Z,\ X^+,\ X^-$ を
$$Z=\left\{(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\in X \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n}a_kW_k=0\right\}$$
$$X^+=\left\{(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\in X \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n}a_kW_k>0\right\}$$
$$X^-=\left\{(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\in X \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n}a_kW_k<0\right\}$$
と定義する。このとき明らかに
$$X=Z\cup X^+\cup X^-$$
であり、$Z\cap X^+=Z\cap X^-=X^+\cap X^-=\emptyset$ であるので、
$$\sharp(X)=\sharp(Z)+\sharp(X^+)+\sharp(X^-) \tag{2}$$
を得る。また明らかに $(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)\in Z$ であるので
$$\sharp(Z)\geqq 1 \tag{3}$$
である。

次に (-1) 倍写像
$$\tau: X\to X,\quad (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\mapsto(-a_1,\ -a_2,\ \cdots,\ -a_n)$$
を考える。これは分銅の配置を左右入れ換えることに対応している。
$$\begin{aligned}\tau\circ\tau\ (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)&=\tau(-a_1,\ -a_2,\ \cdots,\ -a_n)\\&=(-(-a_1),\ -(-a_2),\ \cdots,\ -(-a_n))\\&=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\end{aligned}$$
であるので、$\tau\circ\tau=id_X$ である。更に $\sum_{k=1}^{n}a_kW_k>0$ のとき
$$\sum_{k=1}^{n}(-a_k)W_k=-\sum_{k=1}^{n}a_kW_k<0$$
であることは $\tau(X^+)\subset X^-$ であることを意味している。同様に $\sum_{k=1}^{n}a_kW_k<0$ のと

き $\sum_{k=1}^{n}(-a_k)W_k = -\sum_{k=1}^{n}a_kW_k > 0$ であることは $\tau(X^-)\subset X^+$ であることを意味している。よって $\tau: X^+\to X^-$, $\tau: X^-\to X^+$ を考えることが出来るが、

$$\tau\circ\tau = id_{X^+}: X^+\to X^+,\ \tau\circ\tau = id_{X^-}: X^-\to X^-$$

であるので τ は X^+ と X^- の間の全単射を与える。従って特に

$$\sharp(X^+) = \sharp(X^-) \tag{4}$$

である。

最後に射影

$$\pi: X^+\to P,\quad (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\mapsto a_1W_1+a_2W_2+\cdots a_nW_n$$

を考える。これは分銅の配置に対し、その配置により計れる重さを対応させる写像である。X^+ および P の定義よりこれは明らかに全射である。従って

$$\sharp(X^+) \geqq \sharp(P) \tag{5}$$

である。

以上(1), (2), (3), (4), (5)より $\sharp(P)$ の上からの評価

$$\sharp(P) \leqq \sharp(X^+) = \frac{\sharp(X)-\sharp(Z)}{2} \leqq \frac{3^n-1}{2}$$

を得る。よって

$$P \supseteq \left\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \frac{3^n-1}{2}\right\}$$

となるような組 $(W_1,\ W_2,\ \cdots,\ W_n)$ を発見出来れば、その組及び $N = \dfrac{3^n-1}{2}$ が我々の求めるものである。

ところで等比数列の和の公式

$$\frac{3^n-1}{2} = \frac{3^n-1}{3-1} = 1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}$$

を注目しよう。これを見ると $W_1 = 1,\ W_2 = 3,\ W_3 = 3^2,\ \cdots,\ W_n = 3^{n-1}$ と置けば良さそうな気がしてくる。実際 $n = 3$ のときもそうであった。実際これらの加減で $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \dfrac{3^n-1}{2}$ が実現出来ることを数学的帰納法で示そう。

$n = 1$ のときは明らかである。実際 1 gの分銅により 1 gの物体を計ることは出来る。

$W_1 = 1,\ W_2 = 3,\ W_3 = 3^2,\ \cdots,\ W_n = 3^{n-1}$ の分銅により $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N_n = \dfrac{3^n-1}{2}$ の物体が計ることが出来ると仮定する。このとき $W_{n+1} = 3^n$ の分銅を付け加えることにより、$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}-1}{2}$ の物体が計れることを示そう。まず帰納法の

仮定により W_{n+1} の分銅を使わず W_1, W_2, …, W_n の分銅だけを配置して 1, 2, 3, …, N_n の重さを計ることが出来る。次に W_1, W_2, …, W_n の配置により 1, 2, 3, … N_n の重さを計ることが出来るので、その配置に $W_{n+1}=3^n$ の分銅を右の皿に付け加えることにより、

$$3^n+1,\ 3^n+2,\ 3^n+3,\ \cdots,\ 3^n+N_n$$

の重さを計ることが出来る。更に元の配置の左右を入れ換えて、$W_{n+1}=3^n$ の分銅を右の皿に付け加えることにより、

$$3^n-1,\ 3^n-2,\ 3^n-3,\ \cdots,\ 3^n-N_n$$

の重さも計ることが出来る。ここで

$$3^n+N_n=3^n+\frac{3^n-1}{2}=\frac{3^{n+1}-1}{2}=N_{n+1}$$

$$3^n-N_n=3^n-\frac{3^n-1}{2}=\frac{3^n-1}{2}+1=N_n+1$$

であり、$3^n=W_{n+1}$ の重さも計ることが出来るので、結局

$$1,\ 2,\ \cdots,\ N_n,\ N_n+1,\ \cdots,\ 3^n-2,\ 3^n-1,\ 3^n,\ 3^n+1,\ 3^n+2,\ \cdots,\ N_{n+1}$$

の重さを計れることが分かった。

解答. n 個の分銅の重さが 1, 3, 3^2, …, 3^{n-1} のとき N は最大になり、そのときの N の値は $\dfrac{3^n-1}{2}$ である。

最後に次の問いを出題し、講義を終了した。

問題. $(W_1,\ W_2,\ \cdots,\ W_n)=(1,\ 3,\ \cdots,\ 3^{n-1})$ のとき N は最大値 $N=\dfrac{3^n-1}{2}$ を実現することは分かった。では他の組 $(W_1,\ W_2,\ \cdots,\ W_n)$ により $N=\dfrac{3^n-1}{2}$ を実現することは可能であろうか?

7 まとめ

今回の題材は集合論を用いた数え上げの入門として適したものである。本学を含めほとんどの大学において集合論は半期で学ぶものであるが、このような短期間の講義であると理論が中心となってしまい、なぜ集合論が有用なのかという実践が疎かになってしまうことが多い。特に教育学部の数学専攻においては数え上げ組合せ論の題材などを用いた集合論の実践の講義機会を増やすべきだと考える。

8 補遺:最良評価について

x, y が実数であるとき

$$x^2+y^2>-1$$

であることは明らかである。これは x^2+y^2 という数学的量が -1 より大きいという

評価を与えているのであるが、この評価は最良（best possible）なものではない。x^2+y^2 の下からの最良評価は

$$x^2+y^2 \geqq 0$$

である。これは $(x,\ y)=(0,\ 0)$ のとき実現出来る。

高校数学でよく扱われる例題に以下のようなものがある。

例題. $x,\ y$ を正の実数であるとき

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)$$

の最小値を求めよ。

これの正しい解答は次の通りである。

正答例.

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)=1+\frac{2x}{y}+\frac{y}{x}+2=3+\frac{2x}{y}+\frac{y}{x}$$

である。$x,\ y>0$ より $\dfrac{2x}{y},\ \dfrac{y}{x}>0$ であるので相加相乗平均より、

$$\frac{2x}{y}+\frac{y}{x} \geqq 2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=2\sqrt{2}$$

（等式は $\dfrac{2x}{y}=\dfrac{y}{x}$, すなわち $y=\sqrt{2}\,x$ のとき成立）を得る。よって

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right) \geqq 3+2\sqrt{2}$$

である。<u>例えば $x=1,\ y=\sqrt{2}$ のとき上において等号が成立するので</u>、

$(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}\right)$ の最小値は $3+2\sqrt{2}$ である。

この解答において $3+2\sqrt{2}$ が下からの最良評価であることを示す下線部が重要であるが、高校数学ではあまり気にしていないようだ。

また次がよく見られる、評価の最良性を考えないことに依る誤った解答の例である。

誤答例. $x,\ y>0$ であるので相加相乗平均より

$$x+y \geqq 2\sqrt{xy}. \tag{a}$$

また $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{2}{y} > 0$ であるので相加相乗平均より

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{y}} = 2\sqrt{\frac{2}{xy}}. \qquad \text{(b)}$$

従って(a), (b)の辺々をそれぞれかけることにより

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right) \geqq 2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{\frac{2}{xy}} = 4\sqrt{2} \qquad \text{(c)}$$

を得る。<u>よって $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}\right)$ の最小値は $4\sqrt{2}$ である。</u>

まず(a)において等号成立するのは $x = y$ のときであり、(a)は最良の評価である。次に(b)において等号成立するのは $\dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{y}$、すなわち $y = 2x$ のときであり、(b)も最良の評価である。しかし(c)において等号成立するのは(a)も(b)も等号成立するとき、すなわち $x = y$ かつ $y = 2x$ を満たすときであり、x, $y > 0$ という仮定の元これは起こり得ない。従って(c)の評価は正しい評価であるが、等号実現不可能な最良でない評価である。$(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}\right)$ は確かに $4\sqrt{2}$ よりも大きいが、$4\sqrt{2}$ その最小値にはなっていないのである。

参考文献

[N] Newton 別冊　数理センスを磨く60問数学パズル論理パラドックス, 株式会社ニュートンプレス, 2011.