

電力はどのように伝わるか

－電流概念の本質的な理解に向けて－

出 口 憲

How is electric power transferred?
－Toward the Essential Understanding of Electric Current－

Ken DEGUCHI

2015年11月 6 日受理

抄 録

「電力はどのように伝わるか」という問題は電磁気学の本質に関連する。この論文では、電流の流れている導線内を電力が伝わるのではなく、導線の周囲の空間を電力が伝わることを示す。電場と磁場の外積である Poynting ベクトルが電磁的なエネルギーの流れを表すことは多くの教科書にも記述があるが、従来の議論の多くは電磁波や交流に関するものがほとんどである。本論文ではゾンマーフェルトの教科書 [1] にある計算を基に、直流電流が流れている導線の一部が抵抗を持っている状況下での電場、磁場を計算し、Poynting ベクトルを求めた。そして、Poynting ベクトルを積算したものが抵抗で消費される電力と一致すること、導線の周囲の電場は導線の帯電によるものであることを示した。

キーワード：直流回路, Poynting ベクトル, 電力, エネルギー, 表面電荷

1 はじめに

著者が長年疑問として考えてきたことがある。それは、「電気回路の電流はどこからどのようにして流れ始めるのか」、「電気回路において電磁的なエネルギーの通り道はどこか」といったものである。この2つの疑問は相互に関連し合っているはずである。ただし、これらの疑問を扱うのは大変なので、一番簡単な直流電流が流れている定常状態を理解することから始めたい。本論文で示すことは以下の3つである。

1. 「電流が電磁的なエネルギーを運ぶ」あるいは「導線の中を電磁的なエネルギーが伝わる」というのは間違いである。
2. 直流の場合でも導線の外部空間に電場が存在し、Poynting ベクトルが電磁的なエネルギーを運ぶ。

3. 電流の流れている導線の表面は帯電している。

1.1 「電流が電磁的なエネルギーを運ぶ」あるいは「導線の中を電磁的なエネルギーが伝わる」という間違い

まず、最初に示したものは大抵の人が間違った理解をしていると考えられる。これはゾンマーフェルトの教科書[1]に以下のように記述されている。

エネルギーは $z = \pm\infty$ にある電極から、外部空間を通してあらゆる方向から針金の表面に向かって流れる。導線に流れ込んだエネルギーは動径に平行に、針金の中心軸に向かって流れ込む。その際これらは熱に変わってしまう。導線の内部には、その軸に平行なエネルギーの流れは存在しない。(中略)すなわち導体はエネルギーの不導体であり、不導体だけが電磁エネルギーを損失なく輸送するのである。導体内では電磁エネルギーは他のエネルギーに変わってしまう。導体とか不導体とか言うのは、電荷に対する振舞いを言うのであって、エネルギーに対する振舞いについては、まぎらわしい言い方である。

これは電磁的なエネルギーが電磁波という形で空間を伝わるということと自然に繋がる概念である。すなわち、電磁的なエネルギーは導線を伝わるのではなく、導線の周囲の電流の流れない空間を伝わるということである。「電流が電磁的なエネルギーを運ぶ」という間違った概念を指摘する日本語の文献として松田卓也[2,3]によるものがある。

1.2 直流でも Poynting ベクトルが電磁的なエネルギーを運ぶ

単位面積を通過する単位時間あたりの電磁的なエネルギーは Poynting ベクトルによって表されることが Maxwell 方程式から示される。電磁波や交流の場合に Poynting ベクトルが電磁的なエネルギーを運ぶ点については多くの教科書にも記述されている。

ところが、直流の場合となると意見が別れるようである。やはり、ゾンマーフェルトの教科書[1]には直流であっても電磁的なエネルギーは Poynting ベクトルが運ぶ記述がなされており、ファインマンの教科書[4]でも直流という明示はされていないがエネルギーは回路の周りの空間を通るという記述がある。

直流の場合を考える際に問題となるのは、導線の外部に磁場があるのは簡単にわかるが、電場ができていのかどうかははっきりしないためである。実験的な検証としては文献[5]がある。本論文でも理論計算によって簡単な場合を示すが、文献[6-11]にも多くの計算例があり、時間変動のない電位が Laplace 方程式に従う以上、導線の外部にも電場が存在することは明らかである。

1.3 電流の流れている導線は帯電している

導線外の電場が生じるのは導線表面に電荷が存在するためである。これを示すデモンストレーションのビデオ[12]がある。つまり、電流の流れている導線は帯電しているのである。

ただし、通常の電圧では電荷が少なすぎて確認は困難なため、ビデオでは高電圧によりデモンストレーションを行っている。

1.4 導線の表面電荷による電磁気学と電気回路の統一的理解

電磁気学の教育上の問題の一つは、電磁場を表す基本的な量である電場、磁場という概念と電気回路理論の整合性が取れていないことである。電気回路の理論では、電流、電圧が基本であり、オームの法則、さらにキルヒホッフの法則などから多くの結論が得られるが、電場と磁場が登場することはあまりなく、実用上も困ることはない。しかしながら、電気回路の理論では、「導線内の電場がどうして生じるのか」、「曲がっている導線に沿って電場ができる（電流が流れる）のはなぜか」、といった疑問に対する説明ができない。たとえば、先ほどのファインマンの教科書[4]にも「導線内の電場はどこか遠くにある荷電粒子がつくる」という記述があるだけである。さらに、マイクロ波のような高周波になると導波管を伝わる電磁波のような電気回路理論では扱えない問題が数多くある。このような場合はMaxwell方程式で考察するのだが、電気回路理論との断絶が気になる。自然現象に本質的に境界があるはずはなく、周波数0の直流から高周波まで連続して統一的理解が可能はずである。これらの問題については伝送線路を基に議論した文献[13-15]がある。

近年のアメリカの大学レベルの電磁気学の教科書[17]や講義録[16]を調べてみると、導線の表面電荷を“Surface Charges Model”として積極的に取り上げ、電気回路の様々な説明に利用しているものが見受けられる。これらを見ると、抵抗との境界に電荷が溜まり抵抗内部の電場を生み出す、曲がっている導線に沿って電場ができるのは導線の表面電荷が重要な働きをしている、といった説明が与えられている。電気回路も電磁気学の基本となる電場、磁場で統一的に捉えられることを指摘した論文[18]があり、この著者らが前掲の教科書[17]を執筆している。これらの論文と教科書は、科学研究費助成事業・基盤研究(B)研究課題番号（15H03493研究代表・長洲南海男）に関連するアメリカの科学教育を調査している際に気付いたものである。

なお、日本の教科書においては、太田浩一の教科書[19]に「複雑に折れ曲がった導線でも常に E が一定になるのは導線の表面に電荷が誘導されるからである」という記載がある。

2 導線に存在する表面電荷

2.1 導体内部は帯電しない

まず、導体内部が帯電することはないことを示す。電流密度を \mathbf{j} 、電荷密度を ρ とすると電荷保存則から、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1)$$

次に、電場 \mathbf{E} のガウスの法則を考えると、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2)$$

ここで、 ϵ_0 は誘電率である。電気伝導率を σ とすると微視的なオームの法則から

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (3)$$

(1)、(2)、(3)式から、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho = 0 \quad (4)$$

これを解くと、

$$\rho = \rho_0 e^{-(\sigma/\epsilon_0)t} \quad (5)$$

ここで、 ρ_0 は時刻 $t = 0$ で与えた電荷である。

実際の金属で見積もってみると、 $\tau = \epsilon_0/\sigma \sim 10^{-18} \text{s}$ 程度で電荷はあっという間に消えてしまうことが分かる。消えてしまった電荷は最終的に導体の表面に現れる。

2.2 抵抗の変化する境界面の帯電

定常的な変化しない電流が流れており、途中で電気伝導率が σ_1 から σ_2 に変化する情况进行を考えると、(1)、(3)式から、

$$j = \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 \quad (6)$$

となる。電気伝導率の変化する境界面（断面積 A とする）にガウスの法則を適用すると、

$$Q = \epsilon_0 (E_2 - E_1) A = \epsilon_0 j A (1/\sigma_2 - 1/\sigma_1) = \epsilon_0 I (1/\sigma_2 - 1/\sigma_1) \neq 0 \quad (7)$$

ここで、電流 $I = jA$ となることを用いた。よって、境界面に生じる電荷 Q は 0 でないことになる。

すなわち、抵抗が変化する境界面に電荷が溜まっており、その電荷により電場が生じる。その電場によって自由に動ける電荷（金属であれば自由電子）が力を受ける。

この考え方で一定の電流が流れる理由を次のように示せる。仮に溜まっている電荷が充分でないとすると、電場が弱く、電流は流れにくくなる。このため、流れ込んでくる電流の一部は電荷として境界面に溜まることになる。ところが、電荷が溜まると電場は強くなり、電流をより強く流すようになる。このとき余分に溜まっていた電荷

は電流として流れる。溜まっている電荷によって生じる電場と流れ込んでくる電流が釣り合いの取れた状態になれば、これらの変化は止まる。要するに、境界面に溜まった電荷により発生する電場は、一定の電流を流すように発生することになる。

2.3 導線表面が一般的に帯電していること

完全導体でできており往復している導線を考える。一方は電源、他方に抵抗が接続されているものとする。電源電圧を V とすると、電源の正極側に接続された導線と負極側に接続された導線には電位差 V があることになる。よって、この電位差 V に相当するだけ導線表面は帯電していなければならない。単純に考えると導線がコンデンサーとなっている。よって、導線は帯電していると考えねばならない。

3 ゾンマーフェルトの教科書

3.1 電位、電場、磁場の計算

無限長導線が一定の電気伝導率 σ を持つ場合については、ゾンマーフェルトの教科書[1]に記述がある。ここで、ゾンマーフェルトの手法を振り返っておく。半径 a の z 軸に沿った導線があり、半径 b の中空導体が囲んでいる条件（ここを電位の基準点として選ぶ）下で、導線表面の境界条件として微視的なオームの法則を前提に、Laplace 方程式を解くというやり方である。また、問題から考えて、円筒座標 (r, ϕ, z) を用いるのがよい。直交座標との関係は、 $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ である。なお、電極は $z = \pm \infty$ にあり、 $z = -\infty$ に正極、 $z = \infty$ に負極がある。

まず、境界条件として、電流密度 $\mathbf{j} = (j_r, j_\phi, j_z)$ 、と電場 $\mathbf{E} = (E_r, E_\phi, E_z)$ には、次の微視的なオームの法則が成立する。

$$j_z = \sigma E_z = \text{一定} \quad (8)$$

これは電流が導線表面に平行に流れることを要求するために必要である。

求める電位を $\Phi(r, z)$ とする。ここで、対称性から ϕ 依存性がないことは明らかである。ここで、電位と電場の間には、

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi \quad (9)$$

の関係が成立する。

導線の外部には電荷も電流も存在しないので、電位 Φ は Laplace 方程式に従う。円筒座標の Laplace 方程式は、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (10)$$

となる。ここで、 ϕ 依存性はないので省略した。

よって、(8)、(9)式から、

$$j_z = \sigma E_z = -\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{r=a} \quad (11)$$

Φ を変数分離法によって解くため、

電力はどのように伝わるか

$$\Phi(r, z) = \phi(r)z \quad (12)$$

とおけば、(11)式の境界条件を満たすことは明らかである。(12)式を(10)式に代入すると、

$$\frac{d}{dr}r\frac{d\phi}{dr} = 0 \quad (13)$$

よって、 A 、 B を積分定数として、

$$\phi(r) = A \log r + B \quad (14)$$

を得る。

(11)式から、

$$A \log a + B = -E_z = -\frac{j_z}{\sigma} \quad (15)$$

もう一つの境界条件である導線を取り囲む中空導体上を電位の基準点として選び、

$$\Phi(b, z) = 0 \quad (16)$$

とすると、

$$A \log b + B = 0 \quad (17)$$

(15)、(17)式から、

$$A = \frac{j_z}{\sigma \log \frac{b}{a}}, \quad B = -\frac{j_z \log b}{\sigma \log \frac{b}{a}} \quad (18)$$

よって、

$$\Phi(r, z) = -\frac{j_z}{\sigma} z \frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} \quad (19)$$

を得る。これより、電場 \mathbf{E} は、

$$\begin{aligned} E_r(r, z) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{j_z}{\sigma} \frac{\frac{z}{r}}{\log \frac{b}{a}} = -\frac{I}{\pi a^2 \sigma} \frac{\frac{z}{r}}{\log \frac{b}{a}}, \\ E_\phi(r, z) &= 0, \\ E_z(r, z) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{j_z}{\sigma} \frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} = \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、 I は電流であり、電流密度の z 成分 j_z との間に、 $I = \pi a^2 j_z$ の関係があることを用いた。

また、磁場 $\mathbf{H} = (H_r, H_\phi, H_z)$ は、アンペールの法則を用いれば、

$$H_r = H_z = 0, H_\phi(r, z) = \frac{I}{2\pi r} \quad (21)$$

であることが直ちに分かる。

なお、導線内部 ($r \leq a$) では、

$$E_r = E_\phi = 0, E_z = \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \quad (22)$$

$$H_r = H_z = 0, H_\phi = \frac{I}{2\pi a} \frac{r}{a} \quad (23)$$

である。

3.2 導線表面の電荷

導線表面にガウスの法則を適用し、導線表面の電荷密度 σ_e を求めると、

$$\sigma_e(z) = \epsilon_0(E_r(a+0) - E_r(a-0)) = -\frac{\epsilon_0 I}{\pi a^3 \sigma} \frac{z}{\log \frac{b}{a}} \quad (24)$$

となる。ここで $a \pm 0$ は $r = a$ の近傍を表す。導線表面の電荷密度は z に比例していることが分かる。これは、 $z < 0$ では正に帯電し、 $z > 0$ では負に帯電することを意味する。 $z = 0$ では、 $\sigma_e = 0$ である。

ただし、この電荷密度 σ_e は極めて小さい。たとえば、銅のような金属だと、電気伝導率 $\sigma \sim 5.8 \times 10^7 \text{ } \Omega \cdot \text{m}$ 程度であり、仮に、 $I = 1 \text{ A}$ 、 $a = 1 \text{ mm}$ 、 $b = 10 \text{ cm}$ 、 $z = -10 \text{ cm}$ とすると、 $\sigma_e \sim 7 \times 10^{-13} \text{ C/m}^2 = 7 \times 10^{-19} \text{ C/mm}^2$ と見積もれる。これは、 1 mm^2 あたり、電子が数個程度ということであり、検出は非常に難しいことが分かる。

また、単位長さあたりの電荷 $\lambda_e = 2\pi a \sigma_e$ は、

$$\lambda_e(z) = \frac{2\pi\epsilon_0}{\log \frac{b}{a}} V(z) \quad (25)$$

ここで、 $V(z) = -E_z z = -\frac{I}{\pi a^2 \sigma} z$ は z での電圧である。すると単位長さあたりの電気容量 C として、

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\log \frac{b}{a}} \quad (26)$$

となり、これは中心導体の半径 a 、外部導体の内径 b の無限長同軸ケーブルが単位長さあたりに持っている電気容量の表式と一致する。

3.3 Poyntingベクトル

Poynting ベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は、単位面積を単位時間に通過する電磁的なエネルギーを表す量である。

今の場合、

$$S_r = -E_z H_\phi, \quad (27)$$

$$S_\phi = 0, \quad (28)$$

$$S_z = E_r H_\phi \quad (29)$$

と求めることができる。

(22)、(23)式を用いて導線表面と内部 ($r \leq a$) での Poynting ベクトル \mathbf{S} を求めると、

$$S_r(r \leq a) = -\frac{I}{\pi a^2 \sigma} \frac{I}{2\pi a} \frac{r}{a}, \quad (30)$$

$$S_z(r \leq a) = 0 \quad (31)$$

となる。ここで、 S_r が負になるのは動径方向と逆、すなわち導線に向かってエネルギーが流れ込むことを意味する。また、 $S_z = 0$ なので、導線内部に導線に沿った方向のエネルギーの流れはない。これから、導線の内部を導線に沿って伝わるエネルギーはないことがいえた。

導線表面 ($r = a$) において、導線の長さ L に流れ込む単位時間あたりのエネルギー、すなわち電力 P が計算できる。これには、導線の周囲の長さ $2\pi a$ と z 軸方向の長さ L をかければよい。

$$P = 2\pi a L |S_r(r = a)| = \frac{I^2 L}{\pi a^2 \sigma} = R_L I^2 \quad (32)$$

となる。ここで、導線の長さ L の電気抵抗を R_L とすると、 $R_L = \frac{L}{\pi a^2 \sigma}$ となること

を用いた。よって、導線表面から流れ込む Poynting ベクトルの総量と導線の抵抗でジュール熱として消費される電力とが等しいことが分かった。

また、導線の外部 ($a < r < b$) の Poynting ベクトル \mathbf{S} は、

$$S_r(r > a) = -\frac{I}{\pi a^2 \sigma} \frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} \frac{I}{2\pi r}, \quad (33)$$

$$S_z(r > a, z) = -\frac{I}{\pi a^2 \sigma} \frac{\frac{z}{r}}{\log \frac{b}{a}} \frac{I}{2\pi r} \quad (34)$$

となる。ここで、 S_r は(30)式と同じように導線に向かう方向であること、 z の依存性がないことが分かる。一方、 S_z は $z < 0$ では z 軸の正の向き、 $z > 0$ では z 軸の負の

向きであることが分かる。これは、 $z = \pm\infty$ にある電極から導線に向かうエネルギーの流れが導線外部にあると理解すればよい。

ここで、 z 軸方向の導線外部($a < r < b$)のPoyntingベクトルの総量 $P(z)$ を計算してみると、

$$P(z) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^b dr r S_z(r, z) = -\frac{I^2}{\pi a^2 \sigma \log \frac{b}{a}} z \int_a^b \frac{dr}{r} = -\frac{I^2}{\pi a^2 \sigma} z \quad (35)$$

このように、 $P(z)$ も z に比例しており、 $z < 0$ では z 軸の正の向き、 $z > 0$ では z 軸の負の向きであり、 $z = 0$ に近づくにつれ、 $P(z)$ の大きさは減少することになる。これは途中の導線の抵抗により、電磁的なエネルギーがジュール熱に変化された分だけ $P(z)$ が減少したと解釈できる。

4 無限長導線の一部だけ抵抗があるモデル

4.1 目的

ここでは、ゾンマーフェルトの教科書[1]を基に、無限長導線の一部だけ抵抗があり、それ以外は抵抗がない完全導体となっているモデルを考察する。今までも、現実の回路に近いようなモデルを用いた計算は数多くなされている[6-11]。

では、なぜこのような計算をするのかというと、

- 本当に抵抗に向かってエネルギーが流れ込むのかを確認する。
- 完全導体の部分にエネルギーは流れこまないことを確認する。
- 完全導体と抵抗の境界に電荷が存在することを確認する。

のが目的である。

4.2 モデル

図1のような z 軸に沿った半径 a の無限長導線があり、 $-l/2 \leq z \leq l/2$ だけ抵抗があり、その電気伝導率を σ とする。他の部分($z < -l/2$, $z > l/2$)は完全導体で、電気伝導率 $\sigma = \infty$ とする。対称性から円筒座標 (r, ϕ, z) を用いることにする。

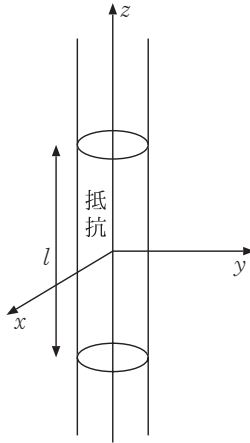


図1 z 軸方向に無限に長い半径 a の導線があり、 $|z| < l/2$ (長さは l) のみ抵抗がある。

4.3 電位 Φ の計算

電位 $\Phi(r, z)$ を求めることにする。考えるモデルの対称性から電位に ϕ の依存性がないことは明らかである。

4.3.1 電位の境界条件

境界条件として、

$$\Phi(a, z) = \begin{cases} \Phi_1, & (z > l/2) \\ \Phi_1(1+2z/l) + \Phi_2(1-2z/l), & (|z| < l/2) \\ \Phi_2, & (z < -l/2) \end{cases} \quad (36)$$

$$\Phi(b, z) = 0 \quad (37)$$

ここで、 $\Phi_1 = \text{一定}$ 、 $\Phi_2 = \text{一定}$ は完全導体に与えた電位である。今は、 $\Phi_2 > \Phi_1$ という条件で考えることにする。導線の表面 ($r = a$) での境界条件は、微視的なオームの法則から導体内部の電場 $E_z = (\Phi_2 - \Phi_1)/l = \text{一定}$ となるように決めた。 $r = b > a$ は電位の基準点として設定する。

4.3.2 導線内部の電位

導線内部については計算をするまでもなく、

$$\Phi(r < a, z) = \Phi(a, z) \quad (38)$$

であることになる。

4.3.3 導線外部の電位

導線外部で Φ は(10)式と同じ Laplace 方程式に従う。ただし、境界条件に z 軸方向の依存性があるため簡単ではなくなる。これらの計算については、文献[20,21]を参考にしている。

まず、 z 軸方向のフーリエ変換を考えて、

$$\Phi(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \Phi_k(r) \quad (39)$$

として、(10)式に代入すると、

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\Phi_k}{dr} - k^2 \Phi_k = 0 \quad (40)$$

となる。この方程式は Bessel の微分方程式なので一般解は分かっていて、

$$\Phi_k(r) = A_k J_0(ikr) + B_k Y_0(ikr) \quad (41)$$

となる。ここで、 J_0 は 0 次の第一種 Bessel 関数、 Y_0 は 0 次の第二種 Bessel 関数、 A_k, B_k は積分定数である。よって、 Φ について(42)式のように書ける。

$$\Phi(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} (A_k J_0(ikr) + B_k Y_0(ikr)) \quad (42)$$

ここで、(36)、(37)式の境界条件を(42)式に用いると、 A_k, B_k を決定する式として、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} (A_k J_0(ika) + B_k Y_0(ika)) = \Phi(a, z) \quad (43)$$

$$A_k J_0(ikb) + B_k Y_0(ikb) = 0 \quad (44)$$

を得る。(44)式から、

$$B_k = -A_k \frac{J_0(ikb)}{Y_0(ikb)} \quad (45)$$

さらに、(43)式を逆フーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ikz} \Phi(a, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk' (A_{k'} J_0(ik'a) + B_{k'} Y_0(ik'a)) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi} e^{-i(k-k')z} \\ &= A_k J_0(ika) + B_k Y_0(ika) \end{aligned} \quad (46)$$

ここで、 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi} e^{-ikz} = \delta(k)$ ($\delta(k)$ はデルタ関数)となることを用いた。すると、

$$A_k = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ikz} \Phi(a, z)}{J_0(ika) - \frac{J_0(ikb)}{Y_0(ikb)} Y_0(ika)} \quad (47)$$

(45)、(47)式から境界条件を取り込んだ Φ が次の(48)式として決定される。

$$\Phi(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \Phi(a, z') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(z-z')} \frac{Y_0(ikb) J_0(ikr) - J_0(ikb) Y_0(ikr)}{J_0(ika) Y_0(ikb) - Y_0(ika) J_0(ikb)} \quad (48)$$

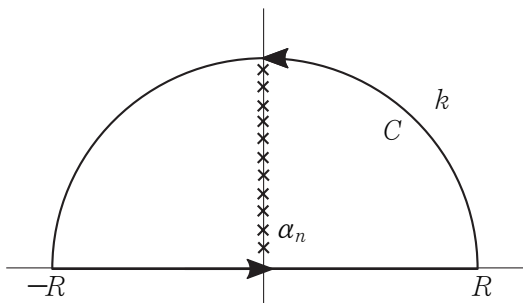


図2 $z-z' > 0$ での複素平面上での積分経路 C_0 。 α_n は被積分関数の極のある場所である。

(48)式の k を複素数だと考え、 k に関する積分を複素平面に拡張する。 $z-z' > 0$ であれば複素平面の上半面を回るように図2のような経路を考える。

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(z-z')} \frac{Y_0(ikb)J_0(ikr) - J_0(ikb)Y_0(ikr)}{J_0(ika)Y_0(ikb) - Y_0(ika)J_0(ikb)} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(z-z')} \frac{Y_0(ikb)J_0(ikr) - J_0(ikb)Y_0(ikr)}{J_0(ika)Y_0(ikb) - Y_0(ika)J_0(ikb)} \\
 &+ \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ i \int_0^\pi \frac{d\theta}{2\pi} R e^{i\theta} e^{iR e^{i\theta}(z-z')} \frac{Y_0(iR e^{i\theta}b)J_0(iR e^{i\theta}r) - J_0(iR e^{i\theta}b)Y_0(iR e^{i\theta}r)}{J_0(iR e^{i\theta}a)Y_0(iR e^{i\theta}b) - Y_0(iR e^{i\theta}a)J_0(iR e^{i\theta}b)} \right\} \quad (49) \\
 &= \oint_C dk e^{ik(z-z')} \frac{Y_0(ikb)J_0(ikr) - J_0(ikb)Y_0(ikr)}{J_0(ika)Y_0(ikb) - Y_0(ika)J_0(ikb)} \\
 &= 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res} \left[\frac{e^{ik(z-z')}}{2\pi} \frac{Y_0(ikb)J_0(ikr) - J_0(ikb)Y_0(ikr)}{J_0(ika)Y_0(ikb) - Y_0(ika)J_0(ikb)} \right]
 \end{aligned}$$

(49)式で追加した経路の被積分関数を見積もると、

$$\begin{aligned}
 & R e^{i\theta} e^{iR e^{i\theta}(z-z')} \frac{Y_0(iR e^{i\theta}b)J_0(iR e^{i\theta}r) - J_0(iR e^{i\theta}b)Y_0(iR e^{i\theta}r)}{J_0(iR e^{i\theta}a)Y_0(iR e^{i\theta}b) - Y_0(iR e^{i\theta}a)J_0(iR e^{i\theta}b)} \\
 &\leq \left| R e^{i\theta} e^{iR e^{i\theta}(z-z')} \frac{Y_0(iR e^{i\theta}b)J_0(iR e^{i\theta}r) - J_0(iR e^{i\theta}b)Y_0(iR e^{i\theta}r)}{J_0(iR e^{i\theta}a)Y_0(iR e^{i\theta}b) - Y_0(iR e^{i\theta}a)J_0(iR e^{i\theta}b)} \right| \\
 &= R e^{-R \sin \theta(z-z')} \left| \frac{Y_0(iR e^{i\theta}b)J_0(iR e^{i\theta}r) - J_0(iR e^{i\theta}b)Y_0(iR e^{i\theta}r)}{J_0(iR e^{i\theta}a)Y_0(iR e^{i\theta}b) - Y_0(iR e^{i\theta}a)J_0(iR e^{i\theta}b)} \right| \\
 &\rightarrow R e^{-R \sin \theta(z-z')} \sqrt{\frac{a}{r}} \left| \frac{\sin(iR e^{i\theta}(b-r))}{\sin(iR e^{i\theta}(b-a))} \right| \quad (50) \\
 &= R e^{-R \sin \theta(z-z')} \sqrt{\frac{a}{r}} \left| \frac{e^{-R(b-r)(\cos \theta + i \sin \theta)} - e^{R(b-r)(\cos \theta + i \sin \theta)}}{e^{-R(b-a)(\cos \theta + i \sin \theta)} - e^{R(b-a)(\cos \theta + i \sin \theta)}} \right| \\
 &\rightarrow R e^{-R \sin \theta(z-z')} \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-R(r-a)|\cos \theta|} \\
 &\rightarrow 0
 \end{aligned}$$

となり、 $R \rightarrow \infty$ で消えてしまうことが確認でき、積分経路の追加に問題はないことが分かる。ここで、 $|z| \rightarrow \infty$ のときの Bessel 関数の漸近形として、次の(51)、(52)式を用いた。

$$J_\nu(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) \quad (51)$$

$$Y_\nu(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) \quad (52)$$

(48)式は(49)式の複素積分に置き換えでき、複素積分の性質から経路内の留数の和を求めれば計算できる。複素平面上で(49)式の被積分関数の極は、 $k = \pm i\alpha_n$ ($\alpha_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$) にあり、 α_n は次の(53)式の超越方程式の解である。この α_n は無限に存在するが、 n に従って大きくなるように並べるものとする。

$$J_0(\alpha_n a) Y_0(\alpha_n b) - Y_0(\alpha_n a) J_0(\alpha_n b) = 0 \quad (53)$$

以下の計算では、Bessel 関数の次の性質を利用する。ここで、 ν は複素数、 n は整数である。

$$2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) \quad (54)$$

$$2Y'_\nu(x) = Y_{\nu-1}(x) - Y_{\nu+1}(x) \quad (55)$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) = J_n(-x) \quad (56)$$

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) = Y_n(-x) \quad (57)$$

極は 1 位で、今考えているのは複素平面の上半面であるから、

$$\begin{aligned} & 2\pi i \text{Res} \left[\frac{e^{ik(z-z')}}{2\pi} \frac{Y_0(ikb)J_0(ikr) - J_0(ikb)Y_0(ikr)}{J_0(ika)Y_0(ikb) - Y_0(ika)J_0(ikb)} \right] \\ &= i \lim_{k \rightarrow i\alpha_n} (k - i\alpha_n) e^{ik(z-z')} \frac{Y_0(ikb)J_0(ikr) - J_0(ikb)Y_0(ikr)}{J_0(ika)Y_0(ikb) - Y_0(ika)J_0(ikb)} \\ &= \frac{e^{-\alpha_n(z-z')} \{Y_0(\alpha_n b)J_0(\alpha_n r) - J_0(\alpha_n b)Y_0(\alpha_n r)\}}{a \{J'_0(-\alpha_n a)Y_0(\alpha_n b) - Y'_0(-\alpha_n a)J_0(\alpha_n b)\} + b \{J_0(\alpha_n a)Y'_0(-\alpha_n b) - Y_0(\alpha_n a)J'_0(-\alpha_n b)\}} \\ &= \frac{e^{-\alpha_n(z-z')} \{Y_0(\alpha_n b)J_0(\alpha_n r) - J_0(\alpha_n b)Y_0(\alpha_n r)\}}{a \{J_1(\alpha_n a)Y_0(\alpha_n b) - Y_1(\alpha_n a)J_0(\alpha_n b)\} + b \{J_0(\alpha_n a)Y_1(\alpha_n b) - Y_0(\alpha_n a)J_1(\alpha_n b)\}} \end{aligned} \quad (58)$$

と留数を求められる。 $z - z' < 0$ であれば複素平面の下半面を回るように経路を追加し、同様の計算をすればよい。

(58)式の結果を(49)式に適用し、 $z-z' < 0$ の場合も合わせて書くと、
 $\Phi(r, z) =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_0(\alpha_n b) J_0(\alpha_n r) - J_0(\alpha_n b) Y_0(\alpha_n r)}{a \{J_1(\alpha_n a) Y_0(\alpha_n b) - Y_1(\alpha_n a) J_0(\alpha_n b)\} + b \{J_0(\alpha_n a) Y_1(\alpha_n b) - Y_0(\alpha_n a) J_1(\alpha_n b)\}} \times \int_{-\infty}^{\infty} dz' \Phi(a, z') e^{-\alpha_n |z-z'|} \quad (59)$$

となる。この(59)式が最終的な Φ である。

いくつかの簡単なモデルを計算しておく、以後の考察の参考になる。

1. $\Phi(a, z) = \Phi_0 = \text{一定の場合}$

この場合は Laplace 方程式が ϕ, z の双方に依存しないので、 Φ は r のみに依存する。

$$\frac{d}{dr} r \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (60)$$

なので、

$$\Phi(r) = A \log r + B \quad (61)$$

となり、境界条件から A, B を求めると、

$$\Phi(r) = \Phi_0 \frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} \quad (62)$$

である。

一方、(59)式の積分を計算すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz' \Phi(a, z') e^{-\alpha_n |z-z'|} = \Phi_0 \left(\int_z^{\infty} dz' e^{-\alpha_n (z'-z)} + \int_{-\infty}^z dz' e^{-\alpha_n (z-z')} \right) = \Phi_0 \frac{2}{\alpha_n} \quad (63)$$

すると、(59)式は、

$$\Phi(r) = \Phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\alpha_n} \quad (64)$$

$$\times \frac{Y_0(\alpha_n b) J_0(\alpha_n r) - J_0(\alpha_n b) Y_0(\alpha_n r)}{a \{J_1(\alpha_n a) Y_0(\alpha_n b) - Y_1(\alpha_n a) J_0(\alpha_n b)\} + b \{J_0(\alpha_n a) Y_1(\alpha_n b) - Y_0(\alpha_n a) J_1(\alpha_n b)\}}$$

(62)、(64)式は同じものなので、以下の関係が成立することになる。

$$\frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\alpha_n} \quad (65)$$

$$\times \frac{Y_0(\alpha_n b) J_0(\alpha_n r) - J_0(\alpha_n b) Y_0(\alpha_n r)}{a \{J_1(\alpha_n a) Y_0(\alpha_n b) - Y_1(\alpha_n a) J_0(\alpha_n b)\} + b \{J_0(\alpha_n a) Y_1(\alpha_n b) - Y_0(\alpha_n a) J_1(\alpha_n b)\}}$$

実際に、 n の最大値を $N = 10, 50, 400$ として計算したものを図3に示す。

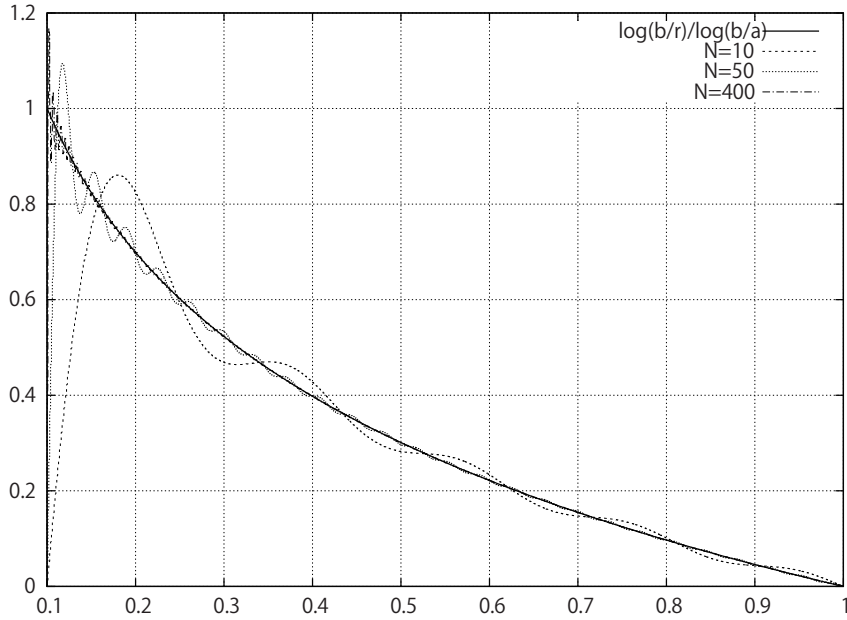


図3 $a = 0.1$, $b = 1$ としたときの(65)式の左辺と右辺との比較。横軸は r である。次数 $N = 10, 50, 400$ としたものを示す。次数を上げれば一致はよくなるが、 $r = a$ の近傍で収束はよくないので、(65)式の関係で置き換えた方がよいことが分かる。

2. $\Phi(a, z) = Az$ の場合

これはゾンマーフェルトの教科書[1]と同じものである。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz' \Phi(a, z') e^{-\alpha_n |z-z'|} = A \left(\int_z^{\infty} dz' z' e^{-\alpha_n (z-z')} + \int_{-\infty}^z dz' z' e^{-\alpha_n (z-z')} \right) = Az \frac{2}{\alpha_n} \quad (66)$$

(59)式に代入し、(65)式の結果を用いると、

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) &= Az \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\alpha_n} \\ &\times \frac{Y_0(\alpha_n b) J_0(\alpha_n r) - J_0(\alpha_n b) Y_0(\alpha_n r)}{a \{J_1(\alpha_n a) Y_0(\alpha_n b) - Y_1(\alpha_n a) J_0(\alpha_n b)\} + b \{J_0(\alpha_n a) Y_1(\alpha_n b) - Y_0(\alpha_n a) J_1(\alpha_n b)\}} \\ &= Az \frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} \end{aligned} \quad (67)$$

となり、(19)式と同様の結果を得る。

では、(36)式の境界条件で計算してみる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz' \Phi(a, z') e^{-\alpha_n |z-z'|}$$

$$= \begin{cases} \Phi_1 \frac{2}{\alpha_n} + \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\alpha_n^2 l} (e^{-\alpha_n(z-l/2)} - e^{-\alpha_n(z+l/2)}), & (z > l/2) \\ \Phi_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{l} \right) \frac{2}{\alpha_n} + \Phi_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{l} \right) \frac{2}{\alpha_n} + \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\alpha_n^2 l} (e^{\alpha_n(z-l/2)} - e^{-\alpha_n(z+l/2)}), & (|z| < l/2) \\ \Phi_2 \frac{2}{\alpha_n} + \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\alpha_n^2 l} (e^{\alpha_n(z-l/2)} - e^{-\alpha_n(z+l/2)}), & (z < -l/2) \end{cases} \quad (68)$$

なので、(65)式の結果も用いると、

$$\Phi(r, z) = \begin{cases} \Phi_1 \frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} + \Psi(r, z), & (z > l/2) \\ \left\{ \Phi_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{l} \right) + \Phi_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{l} \right) \right\} \frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} + \Psi(r, z), & (|z| < l/2) \\ \Phi_2 \frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} + \Psi(r, z), & (z < -l/2) \end{cases} \quad (69)$$

ここで、 $\Psi(r, z)$ は、

$$\Psi(r, z) = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} \quad (70)$$

$$\times \frac{(e^{-\alpha_n |z-l/2|} - e^{-\alpha_n |z+l/2|}) \{Y_0(\alpha_n b) J_0(\alpha_n r) - J_0(\alpha_n b) Y_0(\alpha_n r)\}}{a \{J_1(\alpha_n a) Y_0(\alpha_n b) - Y_1(\alpha_n a) J_0(\alpha_n b)\} + b \{J_0(\alpha_n a) Y_1(\alpha_n b) - Y_0(\alpha_n a) J_1(\alpha_n b)\}}$$

なお、 $\Psi(a, z) = \Psi(b, z) = \Psi(r, 0) = 0$ 、また、 $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \Psi(r, z) = 0$ である。

4.4 電場 E の計算

電位 Φ が計算できたので、電場 E の計算に移る。

4.4.1 導線内部の電場

導線内部では、

$$\begin{aligned} E_r &= 0 \\ E_z &= \begin{cases} 0, & (|z| > l/2) \\ \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l}, & (|z| < l/2) \end{cases} \end{aligned} \quad (71)$$

となり、抵抗のある部分のみ電場が存在する。

4.4.2 導線外部の電場

$$\begin{aligned} E_r(r, z) = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} &= \begin{cases} \frac{\Phi_1}{r \log \frac{b}{a}} - \frac{\partial\Psi}{\partial r}, & (z > l/2) \\ \frac{\Phi_1(1/2+z/l) + \Phi_2(1/2-z/l)}{r \log \frac{b}{a}} - \frac{\partial\Psi}{\partial r}, & (|z| < l/2) \\ \frac{\Phi_2}{r \log \frac{b}{a}} - \frac{\partial\Psi}{\partial r}, & (z < -l/2) \end{cases} \quad (72) \\ E_z(r, z) = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} &= \begin{cases} -\frac{\partial\Psi}{\partial z}, & (|z| > l/2) \\ \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l} \frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} - \frac{\partial\Psi}{\partial z}, & (|z| < l/2) \end{cases} \end{aligned}$$

ここで、 Ψ を微分したものは、

$$-\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} &\times \frac{(e^{-\alpha_n|z-l/2|} - e^{-\alpha_n|z+l/2|}) \{Y_0(\alpha_n b)J_1(\alpha_n r) - J_0(\alpha_n b)Y_1(\alpha_n r)\}}{a \{J_1(\alpha_n a)Y_0(\alpha_n b) - Y_1(\alpha_n a)J_0(\alpha_n b)\} + b \{J_0(\alpha_n a)Y_1(\alpha_n b) - Y_0(\alpha_n a)J_1(\alpha_n b)\}} \\ -\frac{\partial\Psi}{\partial z} &= \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \quad (74) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \frac{Y_0(\alpha_n b)J_0(\alpha_n r) - J_0(\alpha_n b)Y_0(\alpha_n r)}{a \{J_1(\alpha_n a)Y_0(\alpha_n b) - Y_1(\alpha_n a)J_0(\alpha_n b)\} + b \{J_0(\alpha_n a)Y_1(\alpha_n b) - Y_0(\alpha_n a)J_1(\alpha_n b)\}} \\ &\times \begin{cases} e^{-\alpha_n|z-l/2|} - e^{-\alpha_n|z+l/2|}, & (z > l/2) \\ -e^{-\alpha_n|z-l/2|} - e^{-\alpha_n|z+l/2|}, & (|z| < l/2) \\ -e^{-\alpha_n|z-l/2|} + e^{-\alpha_n|z+l/2|}, & (z < -l/2) \end{cases} \end{aligned}$$

なお、(53)式から、 $\frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{r=a, b} = 0$ である。

4.5 表面電荷

4.5.1 抵抗両端の表面電荷

抵抗両端の表面電荷 σ_R を計算するため、抵抗の両端でガウスの法則を適用すると、

$$\sigma_R = \begin{cases} \epsilon_0 \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l}, & (z = -l/2) \\ -\epsilon_0 \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l}, & (z = l/2) \end{cases} \quad (75)$$

抵抗端の全電荷 Q は、抵抗両端の面積 $A = \pi a^2$ を考えると、

$$Q = \sigma_R A = \epsilon_0 \frac{A}{l} (\Phi_2 - \Phi_1) \quad (76)$$

ここで、

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{l} \quad (77)$$

は平行平板コンデンサーの電気容量 C となるので、抵抗の両端は平行平板コンデンサーと同じように振る舞う。

4.5.2 導線の表面電荷

電場が計算できたので導線の表面電荷 σ_e を求める。導線表面でガウスの法則を適用すると、

$$\sigma_e(z) = \begin{cases} \frac{\epsilon_0 \Phi_1}{a \log \frac{b}{a}} - \epsilon_0 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=a}, & (z > l/2) \\ \epsilon_0 \frac{\Phi_1(1/2+z/l) + \Phi_2(1/2+z/l)}{a \log \frac{b}{a}} - \epsilon_0 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=a}, & (|z| < l/2) \\ \frac{\epsilon_0 \Phi_2}{a \log \frac{b}{a}} - \epsilon_0 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=a}, & (z < -l/2) \end{cases} \quad (78)$$

4.6 Poyntingベクトル

Poyntingベクトル \mathbf{S} を計算する。磁場 \mathbf{H} は、

$$H_r = H_z = 0, H_\phi = \frac{I}{2\pi r} \quad (79)$$

ここで、電流 $I = (\Phi_2 - \Phi_1)\pi a^2 \sigma / l = (\Phi_2 - \Phi_1)/R$ 、抵抗 $R = l/(\pi a^2 \sigma)$ である。

Poynting ベクトルは、

電力はどのように伝わるか

$$S_r(r, z) = -E_z H_\phi \quad (80)$$

$$S_z(r, z) = E_r H_\phi \quad (81)$$

ここで、エネルギーの収支が合うかどうかを確認する。

1. $z < -l/2$ を z 軸方向に通り抜ける Poynting ベクトルの総量: P_2

$$P_2 = 2\pi \int_a^b dr r S_z(r, z) = \frac{\Phi_2 I}{\log \frac{b}{a}} \int_a^b \frac{dr}{r} - \int_a^b dr \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \Phi_2 I \quad (82)$$

ここで、 $\Psi(b, z) = \Psi(a, z) = 0$ なので、 $\int_a^b dr \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \Psi(b, z) - \Psi(a, z) = 0$

を利用した。

2. $z > l/2$ を z 軸方向に通り抜ける Poynting ベクトルの総量: P_1

$$P_1 = 2\pi \int_a^b dr r S_z(r, z) = \frac{\Phi_1 I}{\log \frac{b}{a}} \int_a^b \frac{dr}{r} - \int_a^b dr \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \Phi_1 I \quad (83)$$

3. 導線の単位長さあたりに流れ込む Poynting ベクトルの総量: $2\pi a |S_r|$

$$2\pi a |S_r(a, z)| = \begin{cases} 0, & (|z| > l/2) \\ \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l} I, & (|z| < l/2) \end{cases} \quad (84)$$

ここで、 $\frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{r=a} = 0$ を用いた。

$|z| > l/2$ の部分は完全導体であり、この部分に流れ込むエネルギーはない。一方、抵抗のある部分には単位長さあたり $\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l} I$ だけ流れ込むから、抵抗全体では $(\Phi_2 - \Phi_1)I$ で電位差(電圧) × 電流となりジュール熱と一致している。

これらから、 $z = -\infty$ からの電力として、 $\Phi_2 I$ が流れ込んできて、抵抗で $(\Phi_2 - \Phi_1)I$ がジュール熱に変わり、残りの $\Phi_1 I$ が $z = \infty$ に流れ去ることが分かる。よって、エネルギーの収支は完全に合うことが確かめられた。

4.7 数値計算による確認

数値計算により、電位と電場を求めた。導線の半径 $a = 0.1\text{m}$ 、電位の基準点 $b = 1\text{m}$ 、抵抗の長さ $l = 0.1\text{m}$ 、電位差 $\Phi_2 - \Phi_1 = 1\text{V}$ とした。よって、導線は $r \leq 0.1\text{m}$ の範囲にあり、抵抗は $z = 0\text{m}$ を中心とし、 $z = \pm l/2 = \pm 0.05\text{m}$ の範囲にある。

電位の条件は以下の3つとした。また、 α_n は小さい方から400個分を求めて計算に使用した。

1. $\Phi_1 = 1\text{V}$ 、 $\Phi_2 = 2\text{V}$ 。

電位が基準よりいずれも高い場合で、抵抗に流れ込まないエネルギーがあり、それは z 軸の正の方向に向かって流れていく場合を想定した。

2. $\Phi_1 = 0\text{V}$ 、 $\Phi_2 = 1\text{V}$ 。

電位の低い方が0で、抵抗に全てのエネルギーが流れ込む場合を想定した。

3. $\Phi_1 = -0.5\text{V}$ 、 $\Phi_2 = 0.5\text{V}$ 。

電位が対称であり、正負両方からエネルギーが流れ込む場合を想定した。

4.7.1 電位とPoyntingベクトル

電位の計算結果を図4、5、6に示す。図中の曲面上の等高線が等電位線である。当電位線はPoyntingベクトルの流線も表している。前節のPoyntingベクトルの収支計算と図4、5、6から以下のことが結論できる。

1. 等電位線はPoyntingベクトルの流線でもある。よって、Poyntingベクトルは抵抗のある部分のみに流れ込んでいる。すなわち、電磁的なエネルギーは空間から抵抗に向かって流れ込み、抵抗内部では抵抗の中心に向かっていく。
2. 完全導体となっている部分に流れ込むPoyntingベクトルはない。すなわち、電磁的なエネルギーは抵抗のない完全導体に流れ込まない。また、完全導体の内部に電磁的なエネルギーの流れはない。
3. 抵抗で消費されない残りの電磁的なエネルギーは導線に沿って空間を流れていく。

これらは上記の予想通りの結果である。

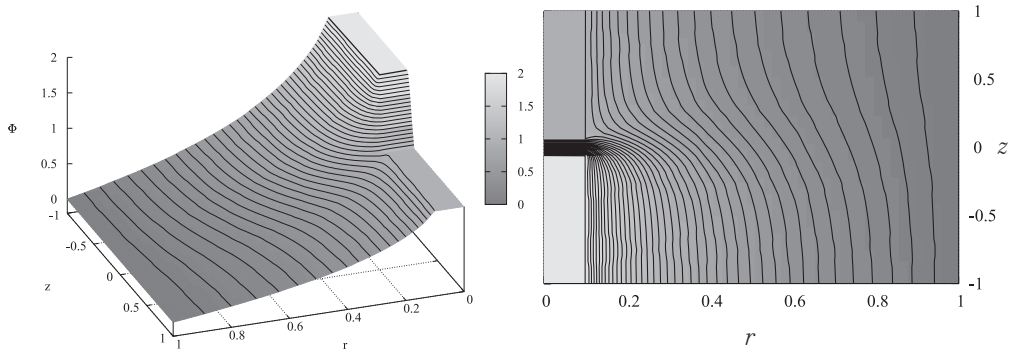


図4 $\Phi_1 = 1V$ 、 $\Phi_2 = 2V$ のときの電位。 $r < 0.1$ 、 $|z| < 0.05$ に抵抗がある。左図は電位を立体的に示したもの。右図は真上から見た時の等電位線。等電位線=Poyntingベクトルは一部が抵抗に流れ込み、残りは z 軸の正の方向にある負極側へ向かう。すなわち、抵抗でジュール熱として消費されないエネルギーは導線に沿って進む。

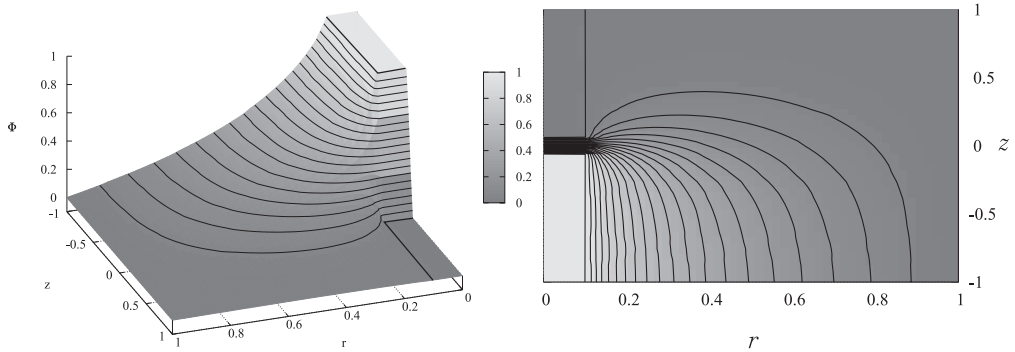


図5 $\Phi_1 = 0V$ 、 $\Phi_2 = 1V$ のときの電位。 $r < 0.1$ 、 $|z| < 0.05$ に抵抗がある。左図は電位を立体的に示したもの。右図は真上から見た時の等電位線。等電位線=Poyntingベクトルは全てが抵抗に流れ込む。抵抗で全ての電磁的なエネルギーがジュール熱に変わることを意味する。

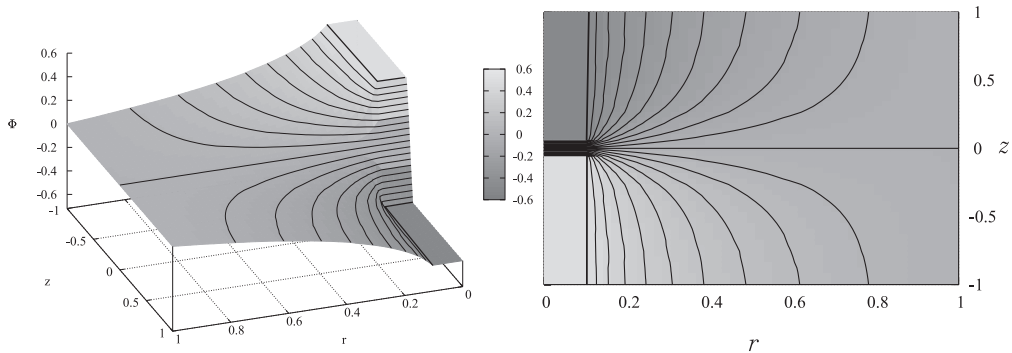


図6 $\Phi_1 = -0.5V$ 、 $\Phi_2 = 0.5V$ のときの電位。 $r < 0.1$ 、 $|z| < 0.05$ に抵抗がある。左図は電位を立体的に示したもの。右図は真上から見た時の等電位線。等電位線=Poyntingベクトルは正負、両方から抵抗に流れ込む。電位の基準点より低い側からも電磁的なエネルギーが流れ込む。

4.7.2 電場

抵抗周辺での電場の様子を図7、8、9に示す。

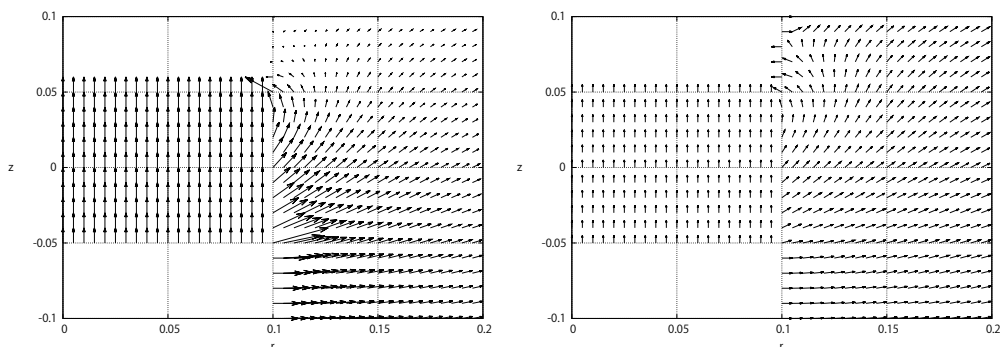


図7 $\Phi_1 = 1\text{V}$ 、 $\Phi_2 = 2\text{V}$ のときの抵抗周辺の電場。 $r < 0.1$ 、 $|z| < 0.05$ に抵抗がある。左図は電場の向きと大きさを示したもの。右図は電場の向きのみを分かりやすく示したもの。 z 軸の負の側が電位が高い。導線外部の電場の向きは z 軸に対して非対称で、 $z > 0$ の部分で $r = b = 1$ にある電位の基準点に向かってる。

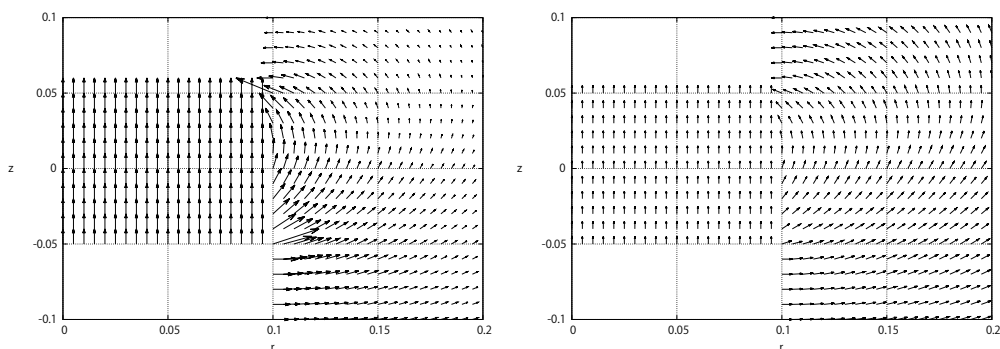


図8 $\Phi_1 = 0\text{V}$ 、 $\Phi_2 = 1\text{V}$ のときの抵抗周辺の電場。 $r < 0.1$ 、 $|z| < 0.05$ に抵抗がある。左図は電場の向きと大きさを示したもの。右図は電場の向きのみを分かりやすく示したもの。 z 軸の負の側が電位が高い。導線外部の電場の向きは z 軸に対して非対称である。

図7、8、9から以下のことが結論できる。

1. 導線内部では、抵抗のある部分のみ一定の電場ができる。電場は電位差で決まる。
2. 導線外部では、抵抗両端の電場が大きく、その向きは抵抗の正極に近い側から空間を通過して負極に近い側へと向かう。
3. 抵抗両端の電位は、流れる電流に影響しないが、導線外部の電場に違いをもたらす。

電力はどのように伝わるか

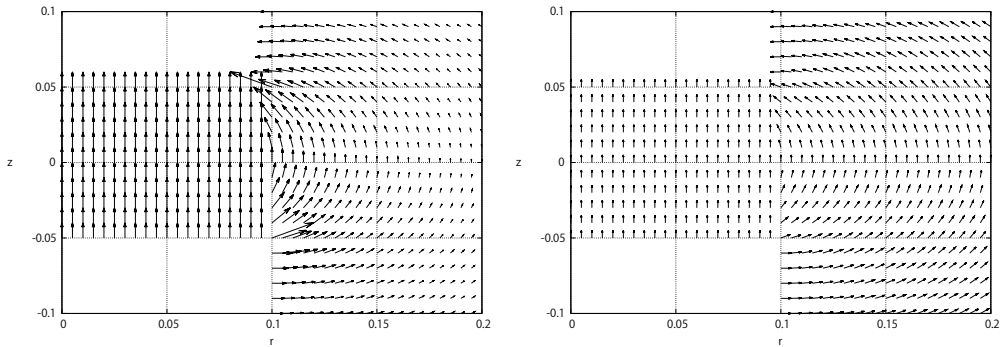


図9 $\Phi_1 = -0.5V$ 、 $\Phi_2 = 0.5V$ のときの抵抗周辺の電場。 $r < 0.1$ 、 $|z| < 0.05$ に抵抗がある。左図は電場の向きと大きさを示したもの。右図は電場の向きのみを分かりやすく示したもの。電位が±対称であることに対応し、電場の向きが z 軸に対して上下対称である。

4.7.3 表面電荷

図10に導線の表面電荷密度の分布を示す。

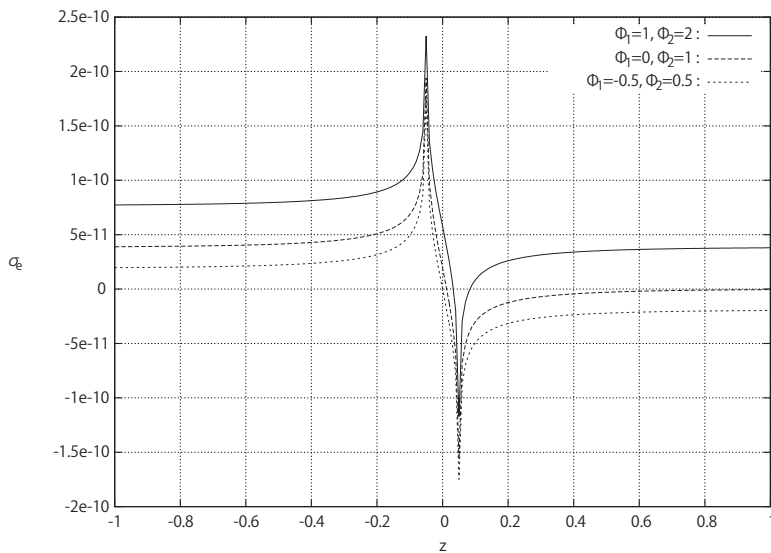


図10 導線表面の電荷密度 σ_e 。ピークとなっているところが抵抗の両端に対応する。電位が全て正でも電荷密度は負になる場所があることに注意。

図10から以下のことが結論できる。

1. 導線は帯電している。このとき、抵抗の両端には正負の電荷が強く溜まっており、抵抗の内部では正から負へとなだらかに変化する。
2. 電位が正であっても負に帯電している領域がある。

5 まとめと今後の課題

直流電流が流れている無限長導線について、電位、電場、表面電荷、Poynting ベクトルの計算を行い、予想が正しいことが確かめられた。以上をまとめると以下のことが結論できる。

1. 電磁的なエネルギーは導線内部ではなく、導線外部の空間を通して運ばれる。よって、「電流が電磁的なエネルギーを運ぶ」あるいは「導線の中を電磁的なエネルギーが伝わる」ということは間違いである。しかし、Poynting ベクトルの収支計算をしてみると単位時間あたりの電磁的なエネルギーである電力 P は、電圧 V と電流 I の積 $P = VI$ として表せる。
2. 導線の外部にも電場が存在し、電流のつくる磁場と Poynting ベクトルを形成することで、電磁的なエネルギーが空間を伝わる。
3. 電流の流れている導線表面は帯電している。実際の帯電を確かめることは難しいが、導線の帯電は電磁的なエネルギーを運ぶという点で大きな働きをしている。

理科で教えている内容との整合性ということで考えてみると、電力は電圧と電流の積になるという点は同じであるため学習内容の変更は必要ないといえる。これらの議論の前提となっている概念の多くは、電場や磁場を学習し、電磁気学の基礎方程式である Maxwell 方程式までたどり着いてから理解できる内容であるため、高等学校までの学習内容として扱うことは適切ではない。

しかし、大学における電磁気学の教育では扱えるし、また電場、磁場という概念と電気回路を統一的な描像で理解できる有効な方法であるといえる。エネルギーの本質を考える上でも非常に示唆に富んだものといえる。導線は電流を流すために必要だが、電磁的なエネルギーは導線の周囲の空間を伝わってくるという考え方は、電磁波が空間を伝わってくるという考え方との整合性がよい。導線の帯電を取り上げた電磁気学の教科書は日本にほとんどない。アメリカのように電磁気学に統一的な理解をもたらす表面電荷の存在と電磁的なエネルギーが空間を運ばれるという概念を積極的に紹介するものがあってよいだろう。

今回は定常状態の場合の計算であった。よって、今後の課題としては、定常状態に達する前の段階で何が起きているかを考察することである。電磁波が伝わる現象をともに扱わなければならないので計算は簡単でないと予想されるが、「電気回路のスイッチを入れたら電流がどこから流れるか」という問題を扱うには、定常状態に達する前の段階を考察することが不可欠である。

なお、本研究は科学研究費助成事業・基盤研究(B)研究課題番号（15H03493研究代表・長洲南海男）に基づく。

参考文献

- [1] A.ゾンマーフェルト、伊藤大介 訳、「ゾンマーフェルト理論物理学講座第3巻・電磁気学」、143～152ページ、講談社、1969年。
- [2] 松田卓也、「電流のエネルギーは電線の外を流れる」、
<http://jein.jp/jifs/scientific-topics/487-topic8.html>。
- [3] 松田卓也、「間違いだらけの物理学」、学研教育出版、2014年。
- [4] R.P.ファインマン、R.レイトン、M.L.サンズ、戸田盛和 訳、「ファインマン物理学4・電磁波と物性」、岩波書店、1971年。
- [5] O. Jefimenko, “Demonstration of the electric fields of current-carrying conductors”, Am. J. Phys. 30, 19-21(1962).
- [6] Mark A. Heald, “Electric fields and charges in elementary circuits”, Am. J. Phys. 52 No.6, 522-526 (1984).
- [7] N. Sarlis, G. Kalkanis, C. A. Londos, S. S. Sklavounos and P. Tsakonas, “A calculation of the surface charges and the electric field outside steady current carrying conductors”, Eur. J. Phys. 17, 37-42 (1996).
- [8] A. K. T. Assis, W. A. Rodrigues Jr., and A. J. Mania, “The Electric Field Outside a Stationary Resistive Wire Carrying a Constant Current”, Foundations of Physics 29 No.5, 729-753 (1999).
- [9] Norris W. Preyer, “Surface charges and fields of simple circuits”, Am. J. Phys. 68 No.11, 1002-1006 (2000).
- [10] J. A. Hernandez and A. K. T. Assis, “Surface Charges and External Electric Field in a Toroid Carrying a Steady Current”, Brazilian Journal of Physics 34 No.4B, 1738-1744 (2004).
- [11] Basil S. Davis and Lev Kaplan, “Poynting vector flow in a circular circuit” (2012).
<http://arxiv.org/abs/1207.2173v1>
- [12] R. W. Chabay and B. A. Sherwood, “Matter and Interactions II, Ch. 19, Surface Charge Demo”.
<http://matterandinteractions.org/Content/Materials/Videos/SurfaceCharge.mov>
- [13] 阿部博史、「Maxwell方程式から見た回路電流」、2006年。
<http://www.3wells-computing.com/index.php/ja/downloads/category/>
- [14] 平林浩一、「伝送線路理論の基礎」、1996年。
<http://www.mogami-wire.co.jp/paper/tline/tline-01.html>
- [15] 「補足-Maxwellの方程式からTEM波の導出」
http://members3.jcom.home.ne.jp/zakii/transmission_line/18tem_solution.htm
- [16] E. Hill, “Phys. 232 General Physics II, Ch. 18 Lect. 3” (2009).
http://bulldog2.redlands.edu/facultyfolder/eric_hill/Phys232/
- [17] R. W. Chabay and B. A. Sherwood, “Matter and Interactions: Volume II-

- Electric and Magnetic Interactions”, John Wiley & Sons (2001).
- [18] B. A. Sherwood and R. W. Chabay, “A unified treatment of electrostatics and circuits” (1999).
<http://www.matterandinteractions.org/Content/Articles/circuit.pdf>
- [19] 太田浩一、「電磁気学の基礎 I」、143ページ、シュプリンガー・ジャパン、2007年。
- [20] 寺沢寛一、「自然科学者のための数学概論(増補版)」、岩波書店、1954年(1983年改版)。
- [21] 國政弘行、「特殊関数とその応用について」、1999年。
<http://www.sci.hyogo-u.ac.jp/math/master/h11/kunimasa.pdf>

インターネット上のものは2015年8月27日に閲覧したものである。