

# 導線外の電磁エネルギーの流れについて

出 口 憲

Analysis of Electromagnetic Energy Flow Out of Wire

Ken DEGUCHI

2019年11月5日受理

## 抄 録

出口(2019) [1]の導線内部電流分布の計算に続き、導線外部の電場分布を調べ、導線外部の電磁エネルギーの流れについて考察した。今回の計算では、文献 [1]で  $b \rightarrow \infty$  とした場合を考え、半径  $a$  の円柱状導体と半無限領域導体が接続されている場合の解析的計算を行い、それに基づいた数値計算を行った。その結果、導線外部の Poynting ベクトルによる電磁エネルギーの流れがどのようになっているか判明した。

キーワード：電場分布、Laplace 方程式、Bessel 関数、Dini 展開、Green 関数

## 1 はじめに

導線外部の電場及び磁場の様子を調べることで、Poynting ベクトルによる電磁エネルギーの流れがわかる。今回は、出口(2019) [1]の導線内部電流分布の計算を基に、半径  $a$  の円柱状導体と半無限領域導体が接続されている場合の解析的計算を行った。導線内部及び導線表面の電位と電場はわかっているため、導線外部の領域の境界条件とし、Green 関数を用いて導線外部の電位及び電場を計算した。これらを数値的に計算して視覚化を行った。

## 2 考察するモデル

図1のように、円筒座標  $(\rho, \varphi, z)$  をとり、 $z < 0$  の領域に半径  $a$  の半無限長さを持つ円柱状導体があり、 $z > 0$  の領域に広がっている半無限導体と  $z = 0$  で接続されている状況を考える。これらの導体の電気伝導率  $\sigma$  はどこでも等しく、円柱状導体の  $z = -\infty$  にある正電極から電流  $I_0$  が流れ出し、 $z > 0$  の半無限導体の無限遠方に

ある負電極に電流が流れ込むものとする。この負電極の電位を  $\phi = 0$  として電位の基準点とする。도체外部  $z < 0, \rho > a$  の領域は電流が流れない、単純に真空であるものとする。

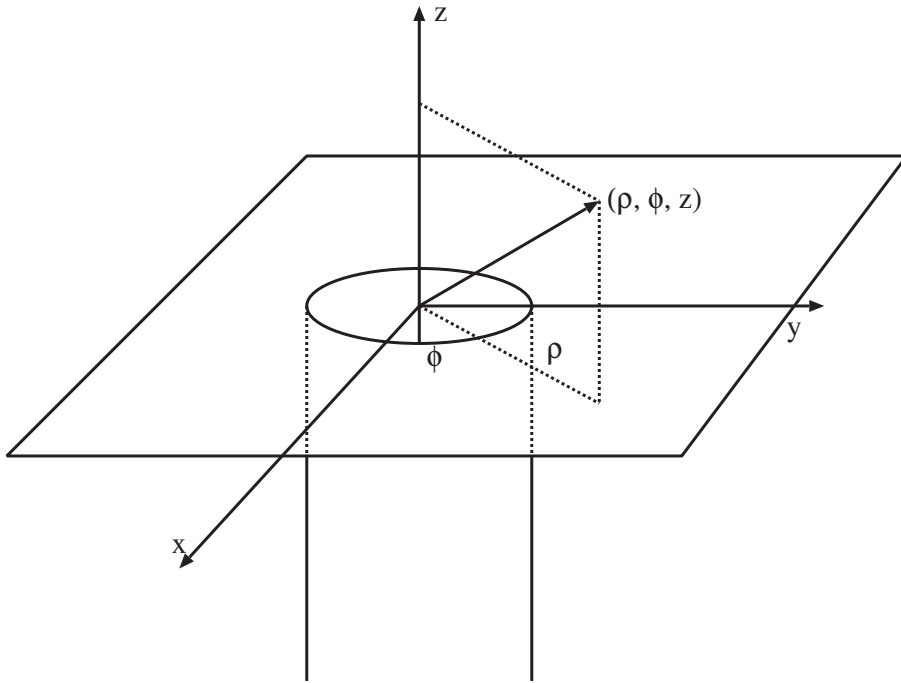


図1：電気伝導率  $\sigma$  の半径  $a$  の円柱状導体と半無限導体が  $z = 0$  で接続されている。

### 3 電位と電場の解析計算

これからの議論では、円柱状導体の領域の電位を  $\phi_1$ 、半無限導体の領域の電位を  $\phi_2$ 、도체外部を領域の電位を  $\phi_3$  とする。これらの電位  $\phi$  は円筒座標の Laplace 方程式を満たすが、今の場合、 $\phi$  依存性がないことは明らかなので、

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi(\rho, z) = 0 \quad (1)$$

また、電場  $\mathbf{E} = (E_\rho, E_z)$  は、電位  $\phi$  から、

$$E_\rho = -\frac{\partial \phi}{\partial \rho}, \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2)$$

境界条件は、

- 境界面で、電位の値が等しい

- 境界面で、電場の境界面に平行な成分は等しい
- 電気伝導率が等しければ、境界面での電位は連続でなめらかである
- 境界面で、電流は境界面に垂直な方向に流れない

これらから、以下の境界条件を得る。

$$\phi_1(\rho < a, z = 0) = \phi_2(\rho < a, z = 0) \quad (3)$$

$$\phi_2(\rho > a, z = 0) = \phi_3(\rho > a, z = 0) \quad (4)$$

$$\phi_3(\rho = a, z < 0) = \phi_1(\rho = a, z < 0) \quad (5)$$

$$E_\rho^{(1)}(\rho < a, z = 0) = -\frac{\partial\phi_1}{\partial\rho}\Big|_{\rho < a, z = 0} = E_\rho^{(2)}(\rho < a, z = 0) = -\frac{\partial\phi_2}{\partial\rho}\Big|_{\rho < a, z = 0} \quad (6)$$

$$E_z^{(1)}(\rho < a, z = 0) = -\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\Big|_{\rho < a, z = 0} = E_z^{(2)}(\rho < a, z = 0) = -\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\Big|_{\rho < a, z = 0} \quad (7)$$

$$E_\rho^{(2)}(\rho > a, z = 0) = -\frac{\partial\phi_2}{\partial\rho}\Big|_{\rho > a, z = 0} = E_\rho^{(3)}(\rho > a, z = 0) = -\frac{\partial\phi_3}{\partial\rho}\Big|_{\rho > a, z = 0} \quad (8)$$

$$E_\rho^{(3)}(\rho = a, z < 0) = -\frac{\partial\phi_3}{\partial\rho}\Big|_{\rho = a, z < 0} = E_z^{(1)}(\rho = a, z < 0) = -\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\Big|_{\rho = a, z < 0} \quad (9)$$

$$E_\rho^{(1)}(\rho = a, z < 0) = -\frac{\partial\phi_1}{\partial\rho}\Big|_{\rho = a, z < 0} = 0 \quad (10)$$

$$E_z^{(2)}(\rho > a, z = 0) = -\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\Big|_{\rho > a, z = 0} = 0 \quad (11)$$

### 3.1 導体内部の電位の解析的な計算

円筒座標を用いることと境界条件(10)式から、電位  $\phi_1, \phi_2$  について、

$$\phi_1(\rho < a, z < 0) = E_0 a \left( \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{2J_0\left(j_{1,m}\frac{\rho}{a}\right)}{J_0(j_{1,m})} e^{j_{1,m}\frac{z}{a} + 2B} \right) \quad (12)$$

$$\phi_2(\rho, z > 0) = E_0 a \int_0^\infty C(x) \frac{J_1(x)}{x} J_0\left(x\frac{\rho}{a}\right) e^{-x\frac{z}{a}} dx \quad (13)$$

と係数  $A_m, B, C(x)$  を用いて表せる。ここで、 $j_{\nu, m}$  は、 $\nu$  次の Bessel 関数の  $m$  番目 ( $m = 1, 2, \dots$ ) の零点であり、 $J_\nu(j_{\nu, m}) = 0$  を満たす。また、 $z \rightarrow -\infty$  のときの電場を  $E_0 = I_0/(\pi a^2 \sigma)$  とおいた。

境界条件(3)、(6)、(7)式から、Bessel 関数の直交性を用いて計算すると、係数  $A_m, B, C(x)$  について、次のような関係を得る。

$$A_m = \int_0^\infty C(x) \frac{[J_1(x)]^2}{x^2 - j_{1,m}^2} dx \quad (14)$$

$$B = \int_0^\infty C(x) \frac{[J_1(x)]^2}{x^2} dx \quad (15)$$

$$C(x) = 1 - x^2 \sum_{m=1}^\infty \frac{2j_{1,m}}{x^2 - j_{1,m}^2} A_m \quad (16)$$

(16)式を、(14)式へ代入して整理すると、

$$A_m = D_m - \sum_{n=1}^\infty 2j_{1,n} \frac{j_{1,m}^2 D_m - j_{1,n}^2 D_n}{j_{1,m}^2 - j_{1,n}^2} A_n \quad (17)$$

$$D_m = \int_0^\infty \frac{[J_1(x)]^2}{x^2 - j_{1,m}^2} dx \quad (18)$$

ここで、 $D_m$  の積分は付録Aに詳しく記載した。また、 $B$  は次式のように表せる。

$$B = \frac{4}{3\pi} - \sum_{m=1}^\infty 2j_{1,m} D_m A_m \quad (19)$$

(17)式はGauss-Seidel 法を用いて数値計算により解けるので、 $A_m$  は決定でき、さらに、(15)、(16)式から係数  $B, C(x)$  も決定できる。

また、(14)、(15)、(16)式は、文献 [1]で、 $b \rightarrow \infty$  としたときに、和を積分に置き換えたものと一致していることがわかる。

### 3.2 導体外部の電位の解析計算

導体外部については Green 関数を用いて計算する。ある境界面  $S$  で  $\phi$  の値  $\phi(S)$  がわかっている場合、すなわち Dirichlet 条件のとき、Green 関数を境界面で  $G = 0$  となるように決めたとすると、考えている領域で  $\phi$  は次式で与えられる。

$$\phi(r) = - \int_S \phi(S') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS' \quad (20)$$

ここで、積分は境界面  $S$  上で行われる面積分であり、 $\frac{\partial G}{\partial n}$  は境界面の法線方向で偏微分する(境界面  $S$  の法線ベクトル  $n$  は考えている領域の外側を正とするように決める)ことを表している。

今の場合、境界面は円柱状導体の表面  $\rho = a, z < 0$  ( $\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial G}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a, z<0}$ ) と半無限導体の表面  $\rho > a, z = 0$  ( $\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{\rho>a, z=0}$ ) であり、この境界で  $G = 0$  となる次式の Green 関数を採用すればよい。

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi') \\
 &\times \int_0^{\infty} d\lambda \left[ \theta(\rho - \rho') K_m(\lambda \rho) \left( I_m(\lambda \rho') - \frac{I_m(\lambda a)}{K_m(\lambda a)} K_m(\lambda \rho') \right) \right. \\
 &+ \theta(\rho' - \rho) \left. \left( I_m(\lambda \rho) - \frac{I_m(\lambda a)}{K_m(\lambda a)} K_m(\lambda \rho) \right) K_m(\lambda \rho') \right] \\
 &\times [\cos \lambda(z - z') - \cos \lambda(z + z')]
 \end{aligned} \tag{21}$$

ここで、 $\rho > a, \rho' > a, z < 0, z' < 0, \varepsilon_m = 2 - \delta_{0m}$ ,  $I, K_\nu$  は  $\nu$  次の第 1 種、第 2 種変形 Bessel 関数である。

(20)式を具体的に書き下してみると、

$$\begin{aligned}
 \phi_3(\rho, z) &= \int_{-\infty}^0 dz' \phi(a, z') \int_0^{2\pi} d\varphi' a \frac{\partial G}{\partial \rho'} \Big|_{\rho'=a} \\
 &- \int_a^{\infty} d\rho' \rho' \phi(\rho', 0) \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\partial G}{\partial z'} \Big|_{z'=0}
 \end{aligned} \tag{22}$$

(22)式中の Green 関数の部分を計算すると、

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' a \frac{\partial G}{\partial \rho'} \Big|_{\rho'=a} = \frac{2}{\pi} \theta(\rho - a) \int_0^{\infty} d\lambda \frac{K_0(\lambda \rho)}{K_0(\lambda a)} \sin \lambda z \sin \lambda z' \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} d\varphi' a \frac{\partial G}{\partial z'} \Big|_{z'=0} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \lambda \sin \lambda z \\
 &\times \left[ \left( I_0(\lambda \rho') - \frac{I_0(\lambda a)}{K_0(\lambda a)} K_0(\lambda \rho') \right) K_0(\lambda \rho) \theta(\rho - \rho') \right. \\
 &+ \left. \left( I_0(\lambda \rho) - \frac{I_0(\lambda a)}{K_0(\lambda a)} K_0(\lambda \rho) \right) K_0(\lambda \rho') \theta(\rho' - \rho) \right]
 \end{aligned} \tag{24}$$

(23)、(24)式を(22)式に代入して整理すると、

$$\phi_3(\rho, z) = \phi_{31}(\rho, z) + \phi_{32}(\rho, z) \tag{25}$$

$$\phi_{31}(\rho, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \sin \lambda z \frac{K_0(\lambda \rho)}{K_0(\lambda a)} \int_{-\infty}^0 dz' \phi(a, z') \sin \lambda z' \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{32}(\rho, z) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \sin \lambda z \lambda \\
 &\times \left[ K_0(\lambda \rho) \int_a^{\rho} d\rho' \rho' \phi(\rho', 0) \left( I_0(\lambda \rho') - \frac{I_0(\lambda a)}{K_0(\lambda a)} K_0(\lambda \rho') \right) \right. \\
 &+ \left. \left( I_0(\lambda \rho) - \frac{I_0(\lambda a)}{K_0(\lambda a)} K_0(\lambda \rho) \right) \int_{\rho}^{\infty} d\rho' \rho' \phi(\rho', 0) K_0(\lambda \rho') \right]
 \end{aligned} \tag{27}$$

境界面の電位は、(12)、(13)式より、

$$\phi(a, z') = E_0 a \left( -\frac{z'}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} 2A_m e^{j1, m \frac{z'}{a}} + 2B \right) \tag{28}$$

$$\phi(\rho', 0) = E_0 a \int_0^\infty C(x) \frac{J_1(x)}{x} J_0\left(x \frac{\rho'}{a}\right) dx \quad (29)$$

(28)、(29)式を(26)、(27)式に代入して計算するが、その際、以下の関係式を用いる。

$$\int_{-\infty}^0 dz' \sin \lambda z' = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{-\infty}^0 dz' e^{\delta z'} \sin \lambda z' = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{-\lambda}{\lambda^2 + \delta^2} = -\frac{1}{\lambda} \quad (30)$$

$$\int_{-\infty}^0 dz' z' \sin \lambda z' = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{-\infty}^0 dz' e^{\delta z'} z' \sin \lambda z' = \lim_{\delta \rightarrow +0} -\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\delta}{\lambda^2 + \delta^2} = -\pi \delta'(\lambda) \quad (31)$$

$$\int_{-\infty}^0 dz' e^{j_{1,m} \frac{z'}{a}} \sin \lambda z' = \frac{-\lambda}{\lambda^2 + j_{1,m}^2/a^2} = -\frac{\lambda a^2}{(\lambda a)^2 + j_{1,m}^2} \quad (32)$$

$$\int_a^\rho d\rho' J_0\left(x \frac{\rho'}{a}\right) I_0(\lambda \rho') = \frac{a^2}{(\lambda a)^2 + x^2} (x \frac{\rho}{a} J_1(x \frac{\rho}{a}) I_0(\lambda \rho) + \lambda \rho J_0(x \frac{\rho}{a}) I_1(\lambda \rho) - x J_1(x) I_0(\lambda a) - \lambda a J_0(x) I_1(\lambda a)) \quad (33)$$

$$\int_\rho^\infty d\rho' J_0\left(x \frac{\rho'}{a}\right) K_0(\lambda \rho') = \frac{a^2}{(\lambda a)^2 + x^2} (\lambda \rho K_1(\lambda \rho) J_0(x \frac{\rho}{a}) - x \frac{\rho}{a} J_1(x \frac{\rho}{a}) K_0(\lambda \rho)) \quad (34)$$

ここで、Bessel 関数の積分は文献[2-5]などを参考にした。すると、次のような解析的な式を得る。

$$\phi_{31}(\rho, z) = E_0 a \left[ -\frac{z}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} 2A_m \chi(\rho, z, j_{1,m}) + 2B \chi(\rho, z, 0) \right] \quad (35)$$

$$\phi_{32}(\rho, z) = E_0 a \int_0^\infty dx C(x) \frac{J_1(x)}{x} \left[ J_0\left(x \frac{\rho}{a}\right) e^{x \frac{z}{a}} - J_0(x) \chi(\rho, z, x) \right] \quad (36)$$

$$\chi(\rho, z, x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{y \sin(yz/a)}{y^2 + x^2} \frac{K_0(y\rho/a)}{K_0(y)} \quad (37)$$

ここで、 $z < 0$  であることに注意する。

#### 4 数値計算

電位について、(12)、(13)、(35)、(36)式のように解析的な表現が得られたので、これらを基にして数値計算を行った。

1.  $j_{1,m}$  の値を必要な個数（今回の計算では100個）求める。
2.  $A_m$  の値を(17)式を用い、Gauss-Seidel 法により求める。このとき、(18)式で表される  $D_m$  の値を求めるには、付録Aに示したように一般超幾何関数  ${}_2F_3(a, a+1; b, b+1, b+2; -z)$  が必要であり、値が小さいとき（おおよそ  $z < 200$ ）は Taylor 級数展開、値が大きいとき（ $z > 200$ ）は付録Bに示したように一般超幾何関数  ${}_2F_3$  の漸近展開を用いた。
3.  $B, C(x)$  を  $A_m$  から求め、電位  $\phi$ 、電場  $\mathbf{E}$  を計算する。

この際、 $a = 1, E_0 = 1$  とし、数値積分は大浦<sup>\*1</sup>による二重指数関数型積分公式のプログラム [6]を用いて計算した。

計算結果を Gnuplot[7]を用いて視覚化したものを図2、図3、図4に示す。 $(\rho, z) = (1, 0)$  で電位の傾きは急激に変化しており、このため電場は対数的に発散する。なお、 $z = 0$  で領域が分かれているが、この部分は収束が悪いため、それぞれの領域から計算した  $z = 0$  の電場については一致していない。

また、等電位面が電磁エネルギーの流れである Poynting ベクトルの流線に対応する。等電位面を図5に示す。

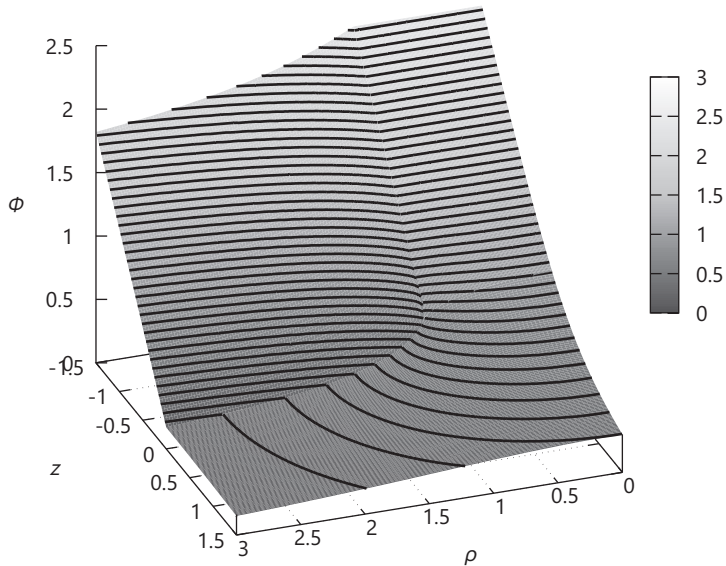


図2: 電位  $\phi$  の様子。 $\rho < 1, z < 0$  の円柱状導体内部では等電位線が等間隔である。一方、 $z > 0$  の半無限導体では円形に広がっていくことがわかる。また、 $\rho > 1, z < 0$  の導体外部では等電位線がかなり密であり、特に、 $\rho = 1, z = 0$  の近くで強い電場が存在していることがわかる。

<sup>\*1</sup>大浦拓哉氏は著者の大学時代の同級生である。

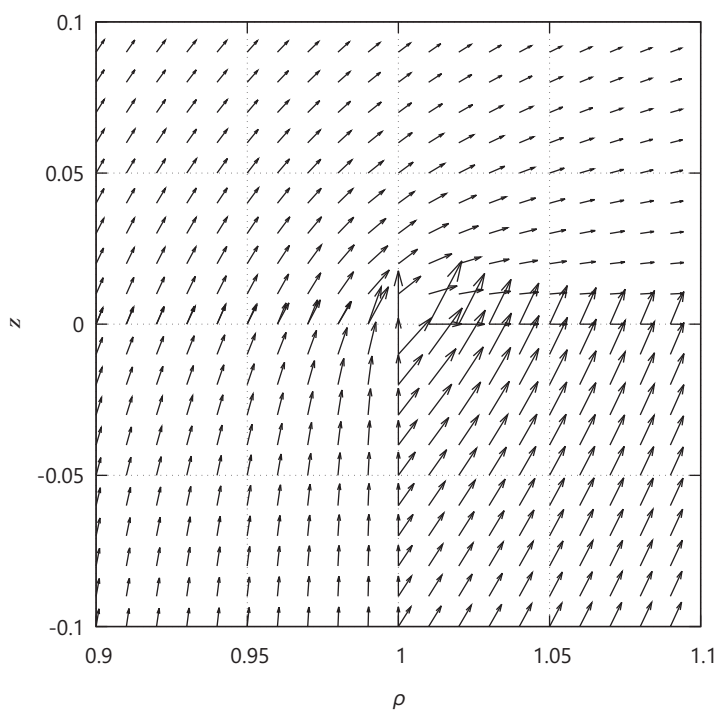


図3: 電場  $\mathbf{E}$  の  $0.9 < \rho < 1.1$ ,  $-0.1 < z < 0.1$  付近の様子。電場の大きさは計算値の  $1/200$  で表示している。 $\rho = 1, z = 0$  で電場は対数的に発散するため図示していない。 $\rho = 1, z = 0$  の周辺で収束が悪いため、 $z > 0$  と  $z < 0$  から計算した電場は一致しないので、電場の矢印が2本描かれている。



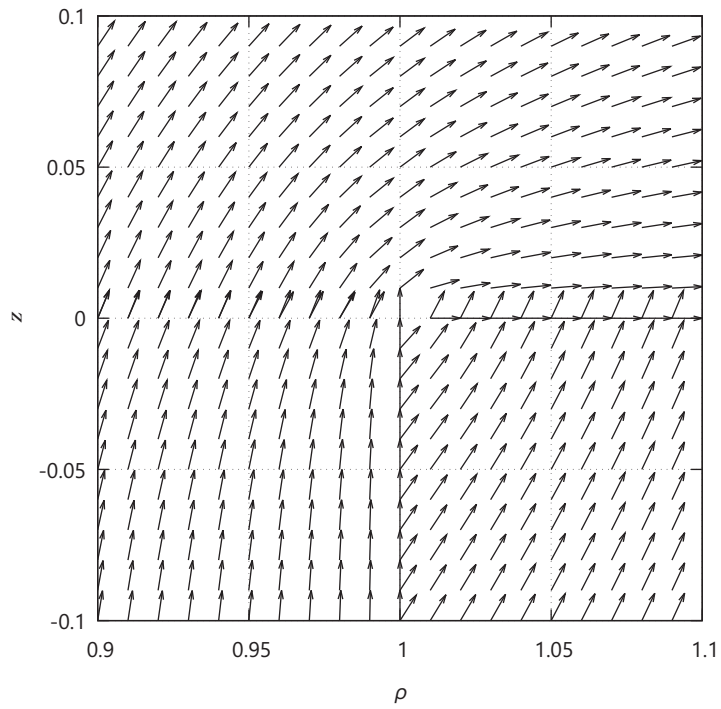


図4: 電場  $\mathbf{E}$  の大きさを規格化し、電場の向きだけを  $0.9 < \rho < 1.1, -0.1 < z < 0.1$  付近で示した。 $\rho = 1, z = 0$  付近で急激に変化する。図3と同じく、 $z = 0$  で電場は一致していない。

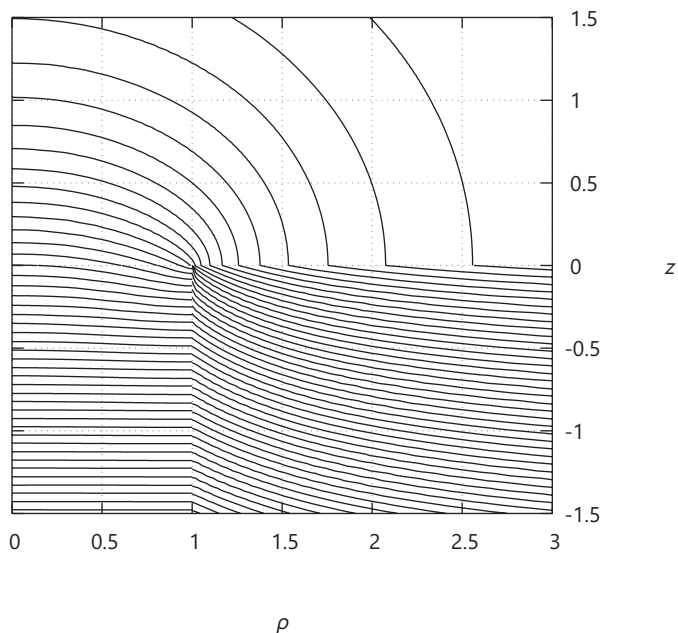


図5: 等電位面(Poynting ベクトルの流線)の様子。 $\rho > 1, z < 0$ の導体外部では、 $\rho = \infty, z = -\infty$ から電磁エネルギーが流れてきて、導体表面から導体内部へ入りJoule熱へ変化する。電流が導体から外部へ流れ出したり流れ込んだりすることはないので、導体表面と内部の等電位面は垂直に交わっている。

## 5 まとめと今後の課題

今回の計算で、導体外部の電位、電場の様子が判明した。これから、電磁エネルギーの流れである Poyntig ベクトルの流線がわかり、導体外部から来た電磁エネルギーが導体内部へ入り込む様子を可視化できた。

今後の課題として、時間変化があるとき、すなわち、スイッチを閉じた後にどのような変化が生じて定常状態に達するのかを検討したい。スイッチ部分に生じていた電位差が、スイッチを入れたことにより周囲に伝わるはずであるが、具体的な様子がどのようなものかは明確でない。このような過渡現象について、もちろん数値的な解析はあるが、何が起きているのかを理解するには解析的な計算が必要である。

付録A 積分  $\int_0^\infty \frac{[J_1(x)]^2}{x^2 - j_{1,m}^2} dx$  について

$$\begin{aligned}
 D_m &= \int_0^\infty \frac{[J_1(x)]^2}{x^2 - j_{1,m}^2} dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty \frac{J_2(2 \cos \theta x)}{x^2 - j_{1,m}^2} dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - j_{1,m}^2} \left[ \frac{J_1(2 \cos \theta x)}{\cos \theta x} - J_0(2 \cos \theta x) \right] \\
 &= \frac{1}{-i j_{1,m}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[ \frac{I_1(-2i j_{1,m} \cos \theta) - \mathbf{L}_1(-2i j_{1,m} \cos \theta)}{-i j_{1,m} \cos \theta} \right. \\
 &\quad \left. - I_0(-2i j_{1,m} \cos \theta) + \mathbf{L}_0(-2i j_{1,m} \cos \theta) \right] \\
 &= \frac{1}{j_{1,m}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[ \mathbf{H}_0(2i j_{1,m} \cos \theta) - \frac{2\mathbf{H}_0(2i j_{1,m} \cos \theta)}{2i j_{1,m} \cos \theta} + i J_2(2J_{1,m} \cos \theta) \right] \\
 &= \frac{1}{j_{1,m}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[ \frac{j_{1,m} \cos \theta}{\sqrt{\pi} \Gamma(5/2)} - \mathbf{H}_2(2i j_{1,m} \cos \theta) \right] + i \frac{\pi}{2} \frac{[J_1(j_{1,m})]^2}{j_{1,m}} \\
 &= \frac{4}{3\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta - \frac{1}{j_{1,m}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \mathbf{H}_2(2i j_{1,m} \cos \theta) \\
 &= \frac{4}{3\pi} - \frac{1}{2j_{1,m}} \int_0^1 dx \frac{\mathbf{H}_2(2j_{1,m} \sqrt{x})}{\sqrt{x(1-x)}} \\
 &= \frac{4}{3\pi} \left[ 1 - \frac{8}{15} j_{1,m}^2 F_3 \left( 1, 2; \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}; -j_{1,m}^2 \right) \right]
 \end{aligned} \tag{38}$$

ここで、 $\Gamma(z)$  は Gamma 関数、 $\mathbf{H}_\nu$  は Struve 関数、 $\mathbf{L}_\nu$  は変形 Struve 関数、 ${}_2F_3$  は一般化超幾何関数であり、文献[2]にある以下の関係式を用いて計算した。

$$[J_1(x)]^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_2(2x \cos \theta x) d\theta \tag{39}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\nu} J_\nu(\alpha x)}{x^2 + \beta^2} dx = \frac{\pi}{2\beta^{\nu+1}} [I_\nu(\alpha\beta) - \mathbf{L}_\nu(\alpha\beta)] \tag{40}$$

$$J_{\nu+1}(z) + J_{\nu-1}(z) = \frac{2\nu J_\nu(z)}{z} \tag{41}$$

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(iz) \tag{42}$$

$$\mathbf{L}_\nu(z) = -ie^{-\frac{i\nu\pi}{2}} \mathbf{H}_\nu(iz) \tag{43}$$

$$\mathbf{H}_{\nu+1}(z) + \mathbf{H}_{\nu-1}(z) = \frac{2\nu\mathbf{H}_\nu(z)}{z} + \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+3/2)} \tag{44}$$

$$\int_0^1 x^{\lambda-\frac{\nu}{2}-\frac{3}{2}}(1-x)^{\mu-1}\mathbf{H}_\nu(a\sqrt{x})dx$$

$$= \frac{B(\lambda,\mu)a^{\nu+1}}{2^\nu\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+3/2)} {}_2F_3\left(1,\lambda;\frac{3}{2},\nu+\frac{3}{2},\lambda+\mu;-\frac{a^2}{4}\right) \tag{45}$$

さらに、1次の Bessel 関数の零点  $j_{1,m}$  を連続変数  $z$  と見なし、

$$D(z) = \frac{4}{3\pi} \left[ 1 - \frac{8}{15} z^2 {}_2F_3\left(1, 2; \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}; -z^2\right) \right] \tag{46}$$

とすると、 $D(0) = \int_0^\infty \frac{[J_1(x)]^2}{x^2} dx = \frac{4}{3\pi}$  であることがわかるが、実際にこれは正しい。なお、 $j_{1,m}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) に対して、 $D_m < 0$  であり、 $j_{1,m} \rightarrow \infty$  のとき、 $D_m \rightarrow 0$  である。実際に数値計算したものを図6に示す。

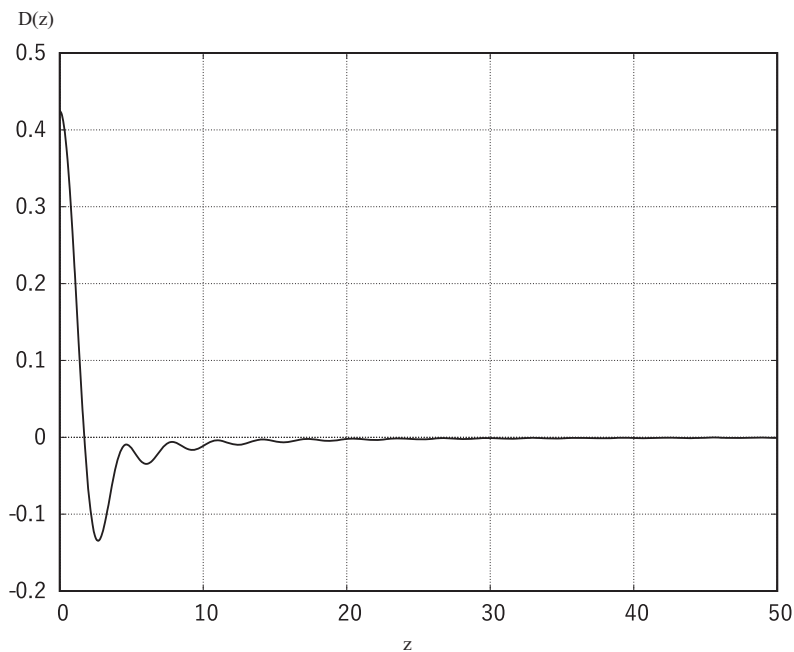


図6:  $D(z)$  をグラフ表示したもの。

付録 B 一般化超幾何関数  ${}_2F_3(a, a+m; b_1, b_2, b_3; -z)$  の漸近展開

${}_2F_3(a, a+m; b_1, b_2, b_3; -z)$  の  $z \rightarrow 0$  での漸近展開を考える。ここで、 $m = 0, 1, 2, \dots$  の整数である。以後、(47)式の規格化された一般化超幾何関数  ${}_p\tilde{F}_q$  を考える。

$${}_2\tilde{F}_3(\mathbf{a}; \mathbf{b}; z) = \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)} {}_pF_q(\mathbf{a}; \mathbf{b}; z) \quad (47)$$

ここで、 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_q)$  とした。

文献[3]によると、 $p = q-1$  であれば(48)式のように漸近展開できる。

$${}_{q-1}\tilde{F}_q(\mathbf{a}; \mathbf{b}; -z) \simeq H_{q-1, q}(z) + E_{q-1, q}(ze^{i\pi}) + E_{q-1, q}(ze^{-i\pi}) \quad (48)$$

ここで、 $H_{p, q}, E_{p, q}$  は以下のように定義されている。

$$H_{p, q}(z) = \sum_{m=1}^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma(a_m + k) \frac{\prod_{l=1, l \neq m}^p \Gamma(a_l - a_m - k)}{\prod_{l=1}^q \Gamma(b_l - a_m - k)} z^{-a_m - k} \quad (49)$$

$$E_{p, q}(z) = (2\pi)^{(p-q)/2} \kappa^{-\nu-1/2} e^{\kappa z^{1/\kappa}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\kappa z^{1/\kappa})^{-\nu-k} \quad (50)$$

$$\kappa = q-p+1, \nu = \sum_{i=1}^p a_i - \sum_{j=1}^q b_j + (q-p)/2 \quad (51)$$

$$c_0 = 1, c_k = -\frac{1}{k\kappa^\kappa} \sum_{m=0}^{k-1} c_m e_{k, m} \quad (52)$$

$$e_{k, m} = \sum_{j=1}^{q+1} (1-\nu-\kappa b_j + m)_{\kappa+k-m} \frac{\prod_{l=1}^p (a_l - b_j)}{\prod_{l=1, l \neq j}^{q+1} (b_l - b_j)}, (b_{q+1} = 1) \quad (53)$$

一般化超幾何関数の積分表示を用いて、 $H_{p, q}$  を求めることにする。

$${}_2\tilde{F}_3(a, a+m; b_1, b_2, b_3; -z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(a+m+s)}{\prod_{j=1}^3 \Gamma(b_j+s)} \Gamma(-s)(-z)^s \quad (54)$$

(54)式は、分子の Gamma 関数により複素平面上で、 $s = -a-k$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) に極を持っているが、 $m > k \geq 0$  のときは  $\Gamma(a+s)$  のみ極を持つので 1 位の極、 $k \geq m$  のときは  $\Gamma(a+s)\Gamma(a+m+s)$  が極を持つので 2 位の極となることに注意する。

$t = -s-a$  と変数変換をすると、

$${}_2\tilde{F}_3 = \frac{(-z)^a}{2\pi i} \int_{i\infty-a}^{-i\infty-a} dt \frac{\Gamma(-t)\Gamma(m-t)\Gamma(a+t)(-z)^{-t}}{\prod_j \Gamma(b_j - a + t)} \quad (55)$$

(55)式に図7のような積分経路を追加し、留数定理を適用する。

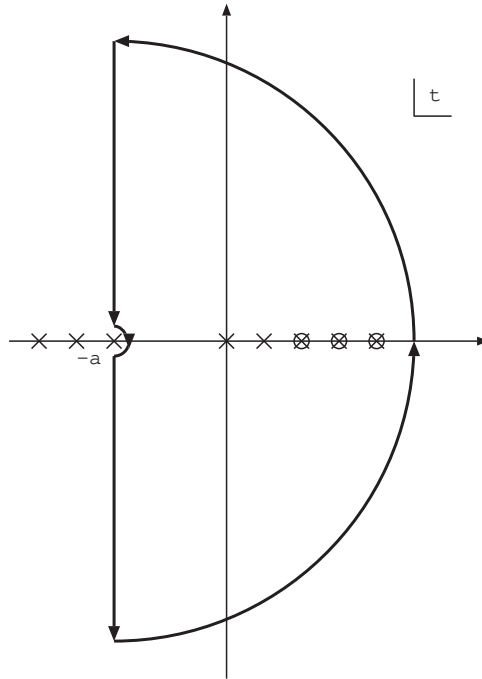


図7: 積分経路。× は1位の極、⊗は2位の極を示す。

**B.1**  $m-1 \geq k \geq 0$  のとき

$\Gamma(-t)$  のみが1位の極を持つので、

$$\lim_{t \rightarrow k} (t-k)\Gamma(-t) = \lim_{t \rightarrow k} (t-k) \frac{\Gamma(-t+k+1)}{(-t)(-t+1)\cdots(-t+k)} = -\frac{(-1)^k}{k!} \quad (56)$$

よって、1位の極からの寄与は、

$$(-z)^{-a} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(m-k)\Gamma(a+k)}{\prod_j \Gamma(b_j - a + k)} z^{-k} \quad (57)$$

B.2  $k \geq m$  のとき

$\Gamma(-t)\Gamma(m-t)$  が 2 位の極を持つので、

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t \rightarrow k} \frac{d}{dt} (t-k)^2 \frac{\Gamma(-t)\Gamma(m-t)\Gamma(a+t)(-z)^{-t}}{\Pi_j \Gamma(b_j - a - m - u)} \\
 &= \lim_{u \rightarrow l} \frac{d}{du} (u-l)^2 \frac{\Gamma(-m-u)\Gamma(-u)\Gamma(a+m+u)(-z)^{-u-m}}{\Pi_j \Gamma(b_j - a - m - u)} \\
 &= \lim_{u \rightarrow l} \frac{d}{du} \frac{[\Gamma(-u+l+1)\Gamma(u-l+1)]^2 \Gamma(a+m+u)(-1)^m (-z)^{-u-m}}{\Gamma(u+1)\Gamma(u+m+1)\Pi_j \Gamma(b_j - a - m - u)} \\
 &= \lim_{u \rightarrow l} \left[ -2\phi(-u+l+1) + 2\phi(u-l+1) + \phi(a+m+u) \right. \\
 &\quad \left. - \phi(u+m+1) - \phi(u+1) - \log(-z) + \sum_j \phi(b_j - a - m - u) \right] \\
 &\quad \times \frac{[\Gamma(-u+l+1)\Gamma(u-l+1)]^2 \Gamma(a+m+u)(-1)^m (-z)^{-u-m}}{\Gamma(u+1)\Gamma(u+m+1)\Pi_j \Gamma(b_j - a - m - u)} \\
 &= \left[ \phi(a+m+l) - \log(-z) - \phi(m+l+1) + \phi(l+1) + \sum_j \phi(b_j - a - m - l) \right] \\
 &\quad \times \frac{\Gamma(a+m+l)(-z)^{-l-m}(-1)^m}{\Gamma(l+1)\Gamma(m+l+1)\Pi_j \Gamma(b_j - a - m - l)}
 \end{aligned} \tag{58}$$

ここで、 $\phi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$  はポリガンマ関数であり、 $u = t - m$  と変数を変換し、 $l = k - m$ , ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) とした。さらに、以下の関係を用いた。

$$\Gamma(-m-u) = (-1)^m \frac{\Gamma(-u)\Gamma(u+1)}{\Gamma(u+m+1)} \tag{59}$$

$$(u-l)\Gamma(-u) = (-1)^{l+1} \frac{\Gamma(-u+l+1)\Gamma(u-l+1)}{\Gamma(u+1)} \tag{60}$$

よって、2 位の極からの寄与は、

$$\begin{aligned}
 & (-z)^{-a} z^{-m} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \log(-z) + \phi(m+l+1) - \phi(a+m+l) + \phi(l+1) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_j \phi(b_j - a - m - l) \right] \\
 &\quad \times \frac{\Gamma(a+m+l)(-z)^{-l}}{\Gamma(l+1)\Gamma(m+l+1)\Pi_j \Gamma(b_j - a - m - l)}
 \end{aligned} \tag{61}$$

(49) 式 of 具体的な表現である (57)、(61) 式、及び (50) 式より、 ${}_2F_3(\mathbf{a}; \mathbf{b}; -z)$  の漸近展開を得る。

## 参考文献

- [1] 出口憲、「導線内電流分布の解析」、常葉大学教育学部紀要第39号、267-281、2019年
- [2] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, "Table of Integrals, Series, and Products -Seventh Edition", Academic Press (2007).
- [3] National Institute of Standards and Technology (NIST), Digital Library of Mathematical Functions, <https://dlmf.nist.gov/>, (2018年10月16日閲覧)
- [4] G.N. Watson, "A Treatise on the Theory of Bessel Functions", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1944.
- [5] 森口繁一、宇田川銈久、一松信、「岩波数学公式 III-特殊関数」、岩波書店、1960年
- [6] 大浦拓哉、「二重指数関数型数値積分公式」、<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ooura/intde-j.html>, (2019年10月29日閲覧)
- [7] Gnuplot, <http://www.gnuplot.info/>, (2018年10月16日閲覧)