

ラグランジュ未定乗数法に代わる、 消費者の効用最大化問題の解法について

田 端 辰 哉

1 導入

ミクロ経済学の伝統的な理論である一般均衡理論では、消費者は予算制約の下で自身の効用を最大化するように、需要行動を決定すると考えられている。この考え方は、L. Walras, W. Jevons, C. Menger らによる限界革命以降、経済学における需要分析の中心的な位置を占めるようになった。これにより、財の価格が生産費（あるいは投入された労働量）によって決定されると考える、古典派経済学ではアノマリーとされてきた、いわゆる「水とダイヤモンドのパラドックス」を整合的に説明できるようになった。

消費者の効用最大化問題を解く際に広く用いられているのが、ラグランジュ未定乗数法である。例えば、ミクロ経済学の有名な教科書である、奥野、鈴木（1985）、西村（1990）、Mas-Colell, Whinston, Green（1995）などでは、いずれもラグランジュ未定乗数法によって効用最大化問題を解いている。しかしながら、偏微分を用いることや、(財が2種類の場合)3変数の連立方程式を解かなければならないことから、難しいイメージを持たれることも多い。そこで、本稿では、より簡便な方法によって消費者の効用最大化問題を解く手法を提示する。

まず、第2節では本稿で扱うモデルを設定し、効用最大化問題を定式化する。さらに、消費者の効用最大化問題の最適点の持つ特徴についても考察する。第3節ではラグランジュ未定乗数法を紹介する。第4節で

はラグランジュ未定乗数法に代わる解法を紹介する。第5節では応用例として、経済学で用いられる代表的な効用関数である、コブ・ダグラス型効用関数と、準線形効用関数の下で効用最大化問題を解いた結果について考察する。

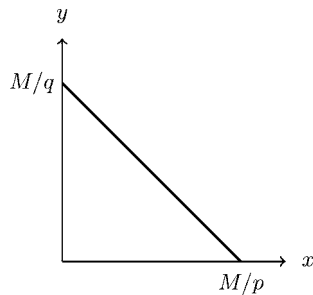
2 消費者の効用最大化問題の定式化

消費者の効用最大化問題は、一般に財が n 種類ある場合を扱うことができるが、ここではミクロ経済学の入門者を念頭に置き、2財に限ることにする。

X 財と Y 財の2財を考え、それぞれの消費量を x, y とおく。考えられる (x, y) 全体を財空間といい、ここでは財空間を \mathbb{R}_+^2 とする。さらに、 X 財と Y 財の価格を p, q ($\in \mathbb{R}_{++}$) とする。消費者は所得 M ($\in \mathbb{R}_{++}$) を取引に先立って、外生的に与えられている。消費者が所得をちょうど使い切る消費量 x, y の組の集合を、予算線という。上の設定の下では、予算線の式は、

$$px + qy = M$$

となり、財空間上では下図のように表される。



ラグランジュ未定乗数法に代わる、消費者の効用最大化問題の解法について（田端）

予算線の傾きの絶対値 p/q を、価格比と呼ぶ。価格比は市場で X 財 1 単位を手に入れるために、手放さなければならない Y 財の量である。 Y 財で測った、市場での X 財の価値と言える。

x 軸、 y 軸、予算線で囲まれた三角形の内部の点も、所得の範囲内で購入可能な消費量の組を表しているが、後に仮定する効用関数の狭義単調性により、最適解として選ばれることはない。¹なぜならば、所得をすべて使い切っていないので、余った予算で財を買い足すことにより、所得の制約を満たしつつ、より効用水準を高めることができるからである。

消費量の組 (x, y) に対して、消費者の選好は、 \mathbb{R}_+^2 から \mathbb{R} への関数 $u(x, y)$ によって表現される。この関数 u を効用関数と呼ぶ。市場は競争的で、各主体は価格受容者であると仮定する。すなわち、ある消費者は価格を与件と考えて行動し、他のある主体の行動に影響を受けず、逆もしかりである。以上で述べたことを定式化すると、

$$\begin{aligned} \max_{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2} & u(x, y) \\ \text{sub.to } & px + qy = M \\ & p, q, M : \text{given} \end{aligned}$$

ここで、効用関数 u に以下の条件を仮定する。

¹ 狭義単調性の仮定を落とせば、三角形の内点が最適消費点になる可能性はある。しかし、それは財の消費量の増加が効用を低下させうる特殊な場合なので、ミクロ経済学の入門者に向けた一般的な分析を扱う本稿では無視して差し支えないであろう。

i) 連続性

\mathbb{R}_+^2 の点 (x', y') を任意に固定する。任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある $\delta > 0$ が存在し、

$$\| (x, y) - (x', y') \| < \delta \Rightarrow |u(x, y) - u(x', y')| < \epsilon$$

とできる。

ii) 狭義単調性

$(x, y) \succ (x', y')$ なる \mathbb{R}_+^2 の任意のベクトル (x, y) , (x', y') について、以下の式が成り立つ。

$$u(x, y) > u(x', y')$$

iii) 狭義擬凹性

\mathbb{R}_+^2 の任意の点 (x, y) , (x', y') と、 $(0, 1)$ に含まれる任意の実数 λ について、以下の式が成り立つ。

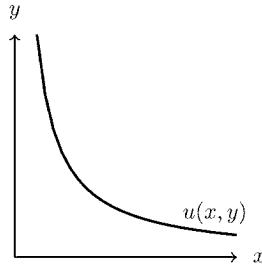
$$u[\lambda x + (1 - \lambda)x', \lambda y + (1 - \lambda)y'] > \min \{u(x, y), u(x', y')\}$$

iv) \mathbb{R}_{++}^2 における 2 階連続微分可能性

2 階の偏導関数、 u_{xx} , u_{xy} , u_{yx} , u_{yy} はいずれも \mathbb{R}_{++}^2 において、連続である。²

財空間における効用関数の等高線を、無差別曲線というが、(ii), (iii) の仮定により、無差別曲線は右下がりであり、原点に凸な形状を持ち、原点から右上に離れるにつれてより高い効用水準を表す。

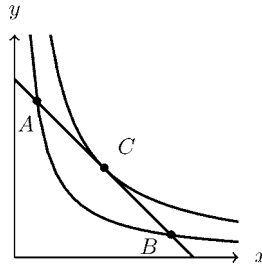
² 2 階連続微分可能性の下では、ヤングの定理により u_{xy} と u_{yx} は同一の関数である。また、2 階連続微分可能性が成り立つ範囲を \mathbb{R}_+^2 ではなく、 \mathbb{R}_{++}^2 としたのは、前者のみに含まれる点は、 u の定義域の端点にあたるからである。



無差別曲線の傾きの絶対値のことを限界代替率という。これは、 X 財の消費を1単位諦めたときに、効用の低下を埋め合わせるのに必要な Y 財の消費量を意味する。³ 限界代替率は、 Y 財で測った、 X 財の主観的な価値と言える。いま、無差別曲線は原点に対して凸なので、 X 財の消費量の増加とともに、限界代替率は下落している。これは、以下の理由から、一般的なケースにおける消費者の選好と整合的である。 X 財が希少であるときは、 X 財の1単位の増減が効用に大きな影響を与えるため、埋め合わせるのに必要な Y 財の量は多くなるであろう。他方、 X 財の消費量が潤沢なときは、 X 財1単位の増減に見合う Y 財の消費量は少なくて構わない。

予算線と無差別曲線に関する以上の議論から、消費者の効用最大化問題は、与えられた所得と価格の下で定まる予算線の上において、なるべく右上の無差別曲線と交じわる点を探す問題と、幾何学的に解釈できる。この問題の解は、無差別曲線と予算線の接点で表されるが、これについて下図を用いて考察する。ただし、図中の右下がりの直線は予算線であり、2本の曲線は、それぞれ効用水準の異なる無差別曲線とする。

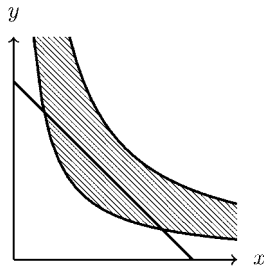
³ この説明は、偏微分の定義に照らし合わせると、やや厳密さを欠く。偏微分は、関数の独立変数のうち一つのみを変化させ、その変化量を0に近づけたときの平均変化率の極限だからである。



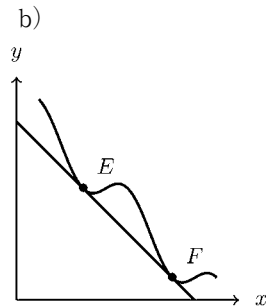
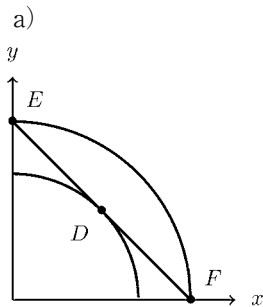
まず、点 A では、予算線の方が無差別曲線よりも緩やかである。すなわち、価格比が限界代替率よりも小さい。予算線に沿って X 財を 1 単位増やすとき、Y 財の減少量は限界代替率より小さくて済むので、効用は元の水準より高くなる。Y 財で測った、市場での X 財の価値が主観的な価値よりも低いので、X 財を市場で安く手に入れることで効用が改善すると解釈できる。一方、点 B では、価格比が限界代替率よりも大きい。このとき、X 財を 1 単位手放して、市場で Y 財を手に入れると、効用が改善する。予算線上の点であっても、無差別曲線が予算線を横断している点では、予算線の他の点に移ることで効用が高くなるので、効用が最大化されていない。よって、もし効用最大化問題の解が存在するならば、予算線と無差別曲線は接しているはずであり、上図では点 C がそれに該当する。

ここで、(ii), (iii) を仮定する意義について考察する。(ii) 狭義単調性を仮定しないと、効用水準の同じ点の集合が無差別「曲線」ではなく、無差別「曲面」となる可能性がある。無差別曲面は、下図の帯状の領域で表され、効用最大化問題の解が無数に存在する可能性がある。

ラグランジュ未定乗数法に代わる、消費者の効用最大化問題の解法について（田端）



(iii) 狭義擬凹性を仮定しないと、(a)原点から右上に対して凸になったり、(b)無差別曲線が波打つ可能性がある。(a)の場合、(効用関数の狭義単調性の下で) 無差別曲線と予算線の接点 D は、効用を最小化する点となり、効用を最大化する点は予算線と縦軸との交点 E もしくは、横軸との交点 F である。(b)の場合、効用最大化問題の解が複数存在する可能性がある。



3 ラグランジュ未定乗数法について

ここでは、消費者の効用最大化問題の解法の一つである、ラグランジュ未定乗数法を紹介する。以下の定理 3.1 では、効用最大化問題の解の必要条件について述べる。

定理 3.1

$px + qy - M = 0$ (ただし、 $q \neq 0$) の制約下における、関数 $u(x, y)$ の最大点 (最小点) (x^*, y^*) は、ラグランジュ関数 $L(x, y, \lambda)$ を

$$L(x, y, \lambda) = u(x, y) + \lambda (px + qy - M)$$

とおくと、以下の(1)-(3)を満たす。

$$L_x(x^*, y^*) = u_x(x^*, y^*) + \lambda p = 0 \quad \cdots(1)$$

$$L_y(x^*, y^*) = u_y(x^*, y^*) + \lambda q = 0 \quad \cdots(2)$$

$$L_\lambda(x^*, y^*) = px^* + qy^* - M = 0 \quad \cdots(3)$$

証明は、丸山 (2021) を参照せよ。

例 3.2

効用関数: $u(x, y) = x^{1/2}y^{1/2}$

X 財の価格: $p = 1$

Y 財の価格: $q = 2$

所得: $M = 12$

このとき、ラグランジュ関数は、

$$L(x, y, \lambda) = x^{1/2}y^{1/2} + \lambda (x + 2y - 12)$$

と表され、効用最大化問題の解 (x^*, y^*) は、

ラグランジュ未定乗数法に代わる、消費者の効用最大化問題の解法について（田端）

$$L_x(x^*, y^*, \lambda) = \frac{1}{2} (x^*)^{-1/2} (y^*)^{1/2} + \lambda = 0 \quad \dots\dots(1)'$$

$$L_y(x^*, y^*, \lambda) = \frac{1}{2} (x^*)^{1/2} (y^*)^{-1/2} + 2\lambda = 0 \quad \dots\dots(2)'$$

$$L_\lambda(x^*, y^*, \lambda) = x^* + 2y^* - 12 = 0 \quad \dots\dots(3)'$$

を満たす。(1)'式と(2)'式を連立して、 λ を消去すると、

$$\frac{1}{2}(x^*)^{-1/2}(y^*)^{1/2} = \frac{1}{4}(x^*)^{1/2}(y^*)^{-1/2} \Rightarrow 2y^* = x^* \quad \dots\dots(4)'$$

(4)'式を(3)'式に代入すると、 $(x^*, y^*) = (6, 3)$ が得られる。

(1)-(3)式の条件の幾何学的な意味づけを行う。(3)式は価格 (p, q) の下で、 (x^*, y^*) は所得をちょうど使い切る、すなわち (x^*, y^*) が予算線上の点であることを含意する。(1)式と(2)式をベクトルで表示すると、

$$\begin{pmatrix} u_x(x^*, y^*) + \lambda p \\ u_y(x^*, y^*) + \lambda q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_x(x^*, y^*) \\ u_y(x^*, y^*) \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \dots\dots(4)$$

となる。ベクトル $(u_x(x^*, y^*), u_y(x^*, y^*))$ は、 (x^*, y^*) における、 u の無差別曲線の接線の法線ベクトルである。同じく (p, q) は予算線の法線ベクトルである。よって、(4)式は、無差別曲線と予算線の法線ベクトルが同一直線上にある、すなわち、 (x^*, y^*) において無差別曲線と予算線が接することを含意する。

また、(4)式より、

$$\frac{u_x(x^*, y^*)}{u_y(x^*, y^*)} = \frac{-\lambda p}{-\lambda q} = \frac{p}{q}$$

この式の最左辺は、陰関数定理⁴より (x^*, y^*) における無差別曲線の接線の傾きの絶対値で、最右辺は予算線の傾きの絶対値である。このことから、 (x^*, y^*) において、無差別曲線と予算線が接することが確認できる。

なお、(1)-(3)式は、効用最大化問題の解 (x^*, y^*) の必要条件であって、十分条件ではない。すなわち、(1)-(3)式を満たしたとしても、効用最大化問題の解になっていないケースがありうる。その例を以下に示す。

例 3.3

効用関数： $u(x, y) = x^2 + y^2$

X 財の価格： $p = 1$

Y 財の価格： $q = 2$

所得： $M = 12$

このとき、ラグランジュ関数 $L(x, y, \lambda)$ は、

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + 2y - 12)$$

である。ラグランジュ未定乗数法により、以下の(1)“(3)”式を考える。

$$L_x(x, y, \lambda) = 2x + \lambda = 0 \quad \dots\dots(1)''$$

$$L_y(x, y, \lambda) = 2y + 2\lambda = 0 \quad \dots\dots(2)''$$

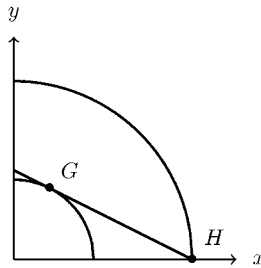
$$L_\lambda(x, y, \lambda) = x + 2y - 12 = 0 \quad \dots\dots(3)''$$

(1)'' 式と(2)'' 式から λ を消去すると、

$$y = 2x$$

⁴ 陰関数定理については、高木(1938)を参照せよ。

さらに、これを(3)式に代入すると、 $(x, y) = (12/5, 24/5)$ が得られる。これは下図の点 G である。ところが、これは効用最大化問題の解ではない。なぜならば、効用関数は原点を中心とする円の式なので、無差別曲線はその円を切り取った弧であり、原点から遠ざかるほど高い効用を表している。無差別曲線と横軸の交点である点 H において、効用が最も高くなる。ラグランジュ未定乗数法から得られた点は、予算線上で効用をむしろ最小化している。



このような反例が生じるのは、ラグランジュ未定乗数法は1階の条件なので、効用関数が擬凹性を満たしていないケースを排除できないからである。2階の条件を調べたり、あるいは効用関数の擬凹性を直接確認することで、解が最大点であることを保証できるが、数学的な準備が多少必要になる。このことも、本稿でラグランジュ未定乗数法に代わる解法を提示する理由の一つである。

4 ラグランジュ未定乗数法に代わる解法

ラグランジュ未定乗数法は、(1)-(3)式を連立することによって、機械的に効用最大化問題の解の候補を探すことができる長所がある。その一方で、偏微分を用いることや、多変数の連立方程式を解かなければいけないことから、難解なイメージを持たれるのも事実である。そこで、本節では1変数の微分のみを用いて、効用最大化問題の解を特徴づける、二つの解法を紹介する。

4.1 予算線の式を効用関数に代入する

予算線の式を x について解くと、

$$x = -\frac{1}{p} (qy - M)$$

これを代入して、 x を消去すると、効用関数は

$$u \left[-\frac{1}{p}(qy - M), y \right]$$

と書き直せる。いま、独立変数は y のみなので、 y について最大化したときの必要条件は、

$$u_x(x, y) \left(-\frac{q}{p} \right) + u_y(x, y) = 0 \quad \dots\dots(5)$$

これを整理すると、

$$\frac{u_x(x, y)}{u_y(x, y)} = \frac{p}{q}$$

となり、予算線と無差別曲線の傾きが等しいことを含意しているので、(5)式は効用最大化問題の必要条件であると言える。上記の方法によって効用最大化問題を解いた例を以下に示す。

例 4.1

効用関数： $u(x, y) = x^{1/2}y^{1/2}$

X 財の価格： $p = 1$

Y 財の価格： $q = 2$

所得： $M = 12$

ラグランジュ未定乗数法に代わる、消費者の効用最大化問題の解法について（田端）

まず、予算線の式は

$$x + 2y = 12 \Rightarrow x = -2y + 12 \quad \dots\dots(6)$$

これを効用関数の式に代入すると、

$$x^{1/2}y^{1/2} = (-2y + 12)^{1/2}y^{1/2} \quad \dots\dots(7)$$

この式を y について微分すると、

$$\begin{aligned} & (-2y + 12)^{1/2} \cdot \frac{1}{2} y^{-1/2} + \frac{1}{2}(-2)(-2y + 12)^{-1/2}y^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}(-2y + 12)^{1/2}y^{-1/2} - (-2y + 12)^{-1/2}y^{1/2} \end{aligned}$$

この式の値が 0 になるとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(-2y+12)^{1/2}y^{-1/2} &= (-2y+12)^{-1/2}y^{1/2} \\ \Rightarrow -2y + 12 &= 2y \\ \Rightarrow y &= 3 \end{aligned}$$

これを(6)式に代入すると、 $x = 6$ となり、ラグランジュ未定乗数法と同じ解が得られた。

また、(7)式の右辺を y で 2 階微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d^2y} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(-2y + 12)^{-1/2}y^{-1/2} - \frac{1}{2}(-2y + 12)^{1/2}y^{-3/2} \right\} \\ &\quad - \left\{ -\frac{1}{2}(-2y + 12)^{-3/2}y^{1/2} + \frac{1}{2}(-2y + 12)^{-1/2}y^{-1/2} \right\} \end{aligned}$$

これに $y = 3$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d^2y} \Big|_{y=3} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (6^{-1/2} 3^{-1/2} - 6^{1/2} 3^{-3/2}) - \frac{1}{2} (-6^{-3/2} 3^{1/2} + 6^{-1/2} 3^{-1/2}) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{6} < 0 \end{aligned}$$

よって、 $(x, y) = (6, 3)$ は、最大化の2階の条件を満たしている。

4.2 予算線の方向ベクトルを効用関数に代入する⁵

予算線の式は、

$$px + qy = M$$

なので、予算線上の点 (x^*, y^*) に対して、 $(x^* + tq, y^* - tp)$ (ただし t は任意の実数) もやはり予算線上の点である。そこで、 $(x^* + tq, y^* - tp)$ を効用関数に代入し、さらに t について微分すると、

$$\frac{d}{dt} u(x + tq, y - tp) = u_x(x + tq, y - tp)q - u_y(x + tq, y - tp)p$$

この式が0と等しいとき、

$$\begin{aligned} u_x(x + tq, y - tp)q - u_y(x + tq, y - tp)p &= 0 \\ \Rightarrow \frac{u_x(x + tq, y - tp)}{u_y(x + tq, y - tp)} &= \frac{p}{q} \end{aligned}$$

さらに、このとき $t = 0$ ならば、

$$\frac{u_x(x, y)}{u_y(x, y)} = \frac{p}{q}$$

⁵ この解法については、中央大学経済学部細矢祐誉氏にご教示いただいた。

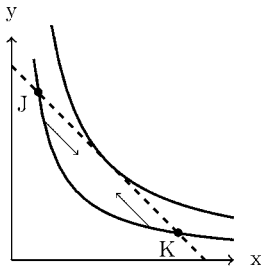
ラグランジュ未定乗数法に代わる、消費者の効用最大化問題の解法について（田端）

この式は、やはり予算線と無差別曲線の傾きが等しいことを含意しているので、

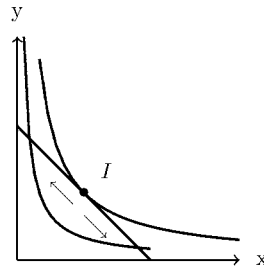
$$\left. \frac{d}{dt} u(x + tq, y - tp) \right|_{t=0} = 0$$

は、消費者の効用最大化問題の必要条件である。

上で行った操作は、無差別曲線上の点から予算線と平行に移動したとき、効用があがることのない点を探すものである。例えば、下図の点 J , K では、予算線と平行に無差別曲線の内側に移動することで、効用が高くなる。一方、予算線と無差別曲線の接点である点 I では、予算線を右下、左上のどちらに進んでも、効用は下がる。



効用が上昇



効用が下落

この方法によって効用最大化問題を解いた例を以下に示す。

例 4.2

効用関数： $u(x, y) = x^{1/2}y^{1/2}$

X 財の価格： $p = 1$

Y 財の価格： $q = 2$

所得： $M = 12$

ベクトル $(x + 2t, y - t)$ を効用関数に代入すると、

$$u(x + 2t, y - t) = (x + 2t)^{1/2}(y - t)^{1/2}$$

これを、 t について微分すると、

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}(x + 2t)^{-1/2}(y - t)^{1/2} + (x + 2t)^{1/2} \frac{1}{2}(y - t)^{-1/2}$$

$$= (x + 2t)^{-1/2}(y - t)^{1/2} - \frac{1}{2}(x + 2t)^{1/2}(y - t)^{-1/2}$$

よって、

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = x^{-1/2}y^{1/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2}$$

この式の値が0のとき、

$$x^{-1/2}y^{1/2} = \frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2} \Rightarrow x = 2y$$

予算線の式に代入すると $(x, y) = (3, 6)$ が得られる。

5 ラグランジュ未定乗数法に代わる解法の応用例

5.1 コブ・ダグラス型効用関数の性質

コブ・ダグラス型効用関数は、 $u(x, y) = x^a y^{1-a}$ ($a \in (0, 1)$) で表される関数である。限界代替率逓減を満たし、現実の消費者の行動と整合的である、観測される支出額のデータからパラメータ a を特定できるなどの利点から、ミクロ経済学やマクロ経済学で広く用いられている関数形である。以下の例 5.1 では、コブ・ダグラス型効用関数の下で、消費者の効用最大化問題を解く。

例 5.1

$$\text{効用関数: } u(x, y) = x^a y^{1-a}$$

$$\text{X 財の価格: } p$$

$$\text{Y 財の価格: } q$$

$$\text{所得: } M$$

予算線の式は、

$$px + qy = M \Rightarrow y = \frac{1}{q}(-px + M)$$

これを効用関数に代入すると、

$$u = x^a \left(\frac{1}{q}(-px + M) \right)^{1-a}$$

さらに、これを x について微分すると、

$$\frac{du}{dx} = a x^{a-1} \left(\frac{1}{q}(-px + M) \right)^{1-a} + x^a (1-a) \frac{1}{q}(-p) \left(\frac{1}{q}(-px + M) \right)^{-a}$$

この式の値が 0 のとき、

$$\begin{aligned} a x^{a-1} \left(\frac{1}{q}(-px + M) \right)^{1-a} &= \frac{p}{q} (1-a) x^a \left(\frac{1}{q}(-px + M) \right)^{-a} \\ \Rightarrow a \left(\frac{1}{q}(-px + M) \right) &= \frac{p}{q} (1-a) x \\ \Rightarrow \frac{M}{q} &= \frac{p}{q} \left(1 + \frac{1-a}{a} \right) x = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{a} x \\ \Rightarrow x &= \frac{M}{p} a \end{aligned}$$

さらに、これを予算線の式に代入すると、

$$y = \frac{M}{q}(1 - a)$$

よって、 X 財、 Y 財の需要関数は、それぞれ双曲線関数で、所得、自身の価格、パラメータに依存して形状が決まることが確認できた。また、 $a, 1 - a$ は、それぞれ最適消費点における X 財、 Y 財への支出シェアを表している。

5.2 準線形効用関数の性質

準線形効用関数とは、ある関数 v によって $u(x, y) = v(x) + y$ と表される効用関数 u の総称である。ここでは、 Y 財として貨幣が想定されている。準線形効用関数は、 X 財への評価が、 Y 財の消費量と独立な消費者の選好を表現している。また、準線形効用関数から、部分均衡分析で用いられる需要曲線を導出できる。以下の例5.2では、準線形効用関数の下で、消費者の効用最大化問題を解く。

例 5.2

効用関数: $u(x, y) = v(x) + y$

X 財の価格: p

Y 財の価格: 1

所得: M

ただし、 v は \mathbb{R}_+ から \mathbb{R} への関数で、微分可能とする。予算線の式は、

$$px + y = M \Rightarrow y = -px + M$$

これを効用関数に代入すると、

$$u = v(x) + (-px + M)$$

さらに、これを x で微分すると、

ラグランジュ未定乗数法に代わる、消費者の効用最大化問題の解法について（田端）

$$\frac{du}{dx} = v'(x) - p$$

この式の値が0のとき、

$$v'(x) = p$$

である。導関数 $v'(x)$ は、 X 財の限界効用を表し、逆需要関数でもある。さらに、 v が2階微分可能であり、定義域全域で $v''(x) < 0$ であるとの仮定を追加すれば、需要曲線は右下がりになる。

6 参考文献

A. Mas-Colell, M. D. Whinston and J. R. Green (1995) *Microeconomic Theory*, Oxford University Press

奥野正寛, 鈴木興太郎 (1985) 『ミクロ経済学 I』、岩波書店

高木貞治 (1938) 『解析概論』、岩波書店

西村和雄 (1990) 『ミクロ経済学』、東洋経済新報社

丸山徹 (2021) 『数理と経済 経済の数学解析』、丸善出版