

導線内電流分布の解析

出口 憲

Analysis of Electric Current Distribution in Wire

Ken DEGUCHI

2018年11月6日受理

抄 録

一般に、複雑な形状の導線内電流分布は Laplace 方程式を数値計算しなければならない。数値計算は強力な手法であるが、なぜそのようになるのかを考える場合は必ずしも見通しがよくない。そこで、本論文ではなるべく数値計算によらず、解析的に取り扱えるモデルとして、電気伝導率が場所によらず一定の導体を考え、半径がある場所で不連続に変わる導線を取り上げた。計算手法として Bessel 関数による Dini 展開を用いた。

キーワード：導線、電流分布、Laplace方程式、Bessel関数、Dini展開

1 導線内電流分布を考える意義

電力がどのように伝わるかを考察する上で、導線内部の電流分布を知ることは重要である。

たとえば、直線的で半径が一樣な導線に直流電流が流れている場合、内部の電流分布も一樣である。しかし、導線が曲がっている場合、内部の電流密度は場所により異なる。

導線の半径がある場所で不連続に変化している場合、どのような電流分布になるだろうか。このような問題について現在は数値計算で扱うことが一般的であるが、様々な考察をするには解析的な手法が優れている。

本論文では、Bessel 関数を用いた Dini 展開により電流分布を求めることとした。Bessel 関数を始めとする特殊関数は、過去に膨大な研究がなされているため、様々な関係式や積分公式等が多数用意されている。これらを駆使し、解析的な式で導線内の電流分布を求め、最後に数値計算により可視化することとした。

2 導線内電流分布の計算方法

電気伝導率が σ の導体内を流れる電流の電流密度 \mathbf{j} と電場 \mathbf{E} は、次の微視的なオームの法則に従う。

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (1)$$

(1)式から、電場 \mathbf{E} と電流密度 \mathbf{j} は比例するので、電場を求めれば電流密度も求まることになる。今考えるのは直流の場合なので、電場 \mathbf{E} は渦なしの場 ($\nabla \times \mathbf{E} = 0$) であり、その電位 ϕ ($\mathbf{E} = -\nabla\phi$) は次の Laplace 方程式を満たす。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2)$$

導線は円柱形なので、円筒座標 (ρ, ϕ, z) を用いて、Laplace 方程式を表すと、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi(\rho, \phi, z) = 0 \quad (3)$$

今考えているモデルでは導線が円柱形であるため ϕ 依存性はない。すると、Laplace 方程式の一般解は、

$$\begin{aligned} \phi(\rho, z) = \int_0^\infty d\lambda (A(\lambda) J_0(\lambda\rho) + B(\lambda) Y_0(\lambda\rho)) (C(\lambda) e^{\lambda z} + D(\lambda) e^{-\lambda z}) \\ + (E \log \rho + F)(Gz + H) \end{aligned} \quad (4)$$

と表せる。ここで、 A, B, \dots, H は適当な係数である。

導線表面から外側へ、あるいは内側へ流れる電流はないので、「電流は表面に対して垂直な成分は持たない」という境界条件を設定する。導線表面の法線ベクトルを \mathbf{n} とすると、

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (5)$$

と表せるので、(5)式の境界条件に合うように、(4)式の係数を決定すればよい。

3 Bessel 関数の諸性質について

円筒座標では Bessel 関数を用いることになるため、以後の計算に必要な Bessel 関数に関連する性質について述べておく。なお、これらについては文献[1-5]を参照した。

3.1 Bessel 関数の関係式

第 ν 次の第 1 種、第 2 種 Bessel 関数 $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ の間に以下のような関係がある。

$$J_\nu(z) Y_{\nu+1}(z) - J_{\nu+1}(z) Y_\nu(z) = -\frac{2}{\pi z} \quad (6)$$

$$Z_{\nu+1} + Z_{\nu-1}(z) = \frac{2\nu}{z} Z_\nu(z) \quad (7)$$

ここで、 Z_ν は Bessel 関数及び Hankel 関数を代表的に表す。

3.2 Bessel 関数の直交性と Dini 展開

Bessel関数を用いて他の関数を級数展開することを考える。これらは、Fourier-Bessel 展開、あるいはより一般化した Dini 展開と呼ばれる Bessel 関数の零点を用いた級数展開である。Dini 展開とは、次の方程式で定められる零点を用いた級数展開である。

$$AJ_0(x) + BxJ_0'(x) = 0 \quad (8)$$

導線表面で電流が満たす境界条件は、 $J_0'(x) = -J_1(x) = 0$ であるため、Dini 展開の $A = 0, B = 1$ に相当する。1 次の Bessel 関数が $J_1(x) = 0$ となる零点を $x = j_{1,n}$ と定める。ここで、 $n = 1, 2, 3, \dots$ とし、 n にしたがって小さい順に $j_{1,n}$ を並べることにする。

零点を用いると、以下のような Bessel 関数の直交関係が成立する。

$$\int_0^a d\rho \rho J_0\left(j_{1,n} \frac{\rho}{a}\right) = 0 \quad (9)$$

$$\int_0^a d\rho \rho J_0\left(j_{1,m} \frac{\rho}{a}\right) J_0\left(j_{1,n} \frac{\rho}{a}\right) = \frac{a^2}{2} [J_0(j_{1,n})]^2 \delta_{mn} \quad (10)$$

$$\int_0^a d\rho \rho J_1\left(j_{1,m} \frac{\rho}{a}\right) J_1\left(j_{1,n} \frac{\rho}{a}\right) = \frac{a^2}{2} [J_0(j_{1,n})]^2 \delta_{mn} \quad (11)$$

これらの直交関係を利用すれば、 $\rho < a$ の範囲で他の関数を展開できる。

また、 ρ が $(0, \infty)$ の範囲の場合、

$$\int_0^\infty d\rho \rho J_\nu(\lambda\rho) J_\nu(\mu\rho) = \frac{\delta(\lambda - \mu)}{\lambda} \quad (12)$$

となり同様に直交関係を満たす。

4 導線が完全導体に接続されている境界付近の電流分布

4.1 問題設定

半径 a 、電気伝導率 σ の導線 ($z < 0$ の領域) が、 $z = 0$ で完全導体 ($z > 0$ の領域全てが完全導体、つまり電気伝導率 $\sigma = \infty$ とする) に接続されている場合を考える。図 1 のように円筒座標 (ρ, φ, z) を設定する。

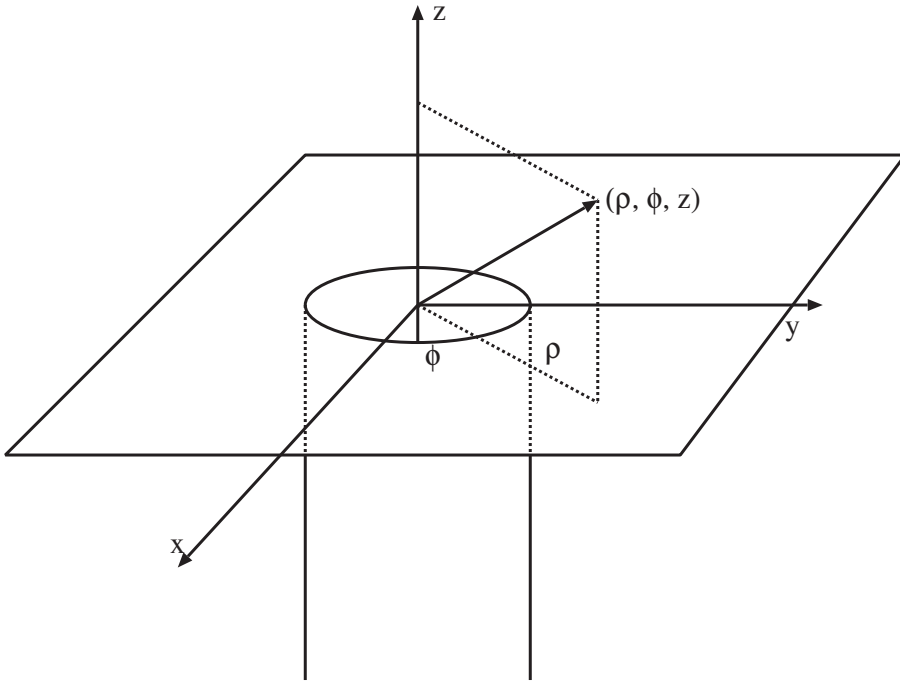


図1: 完全導体と接続された導線。 $z > 0$ が完全導体。

1. 直流電流 I_0 が導線から完全導体に流れ込む。
2. 完全導体内部は電場が 0 で電位は一定であるため、電位 $\phi(\rho, z > 0) = 0$ とする。
3. 導体表面に対して垂直な電流成分はないので、 $\left. \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right|_{\rho=a, z < 0} = 0$ である。

次のように電位 ϕ を設定する。

$$\phi(\rho, z) = \begin{cases} 0 & (z > 0) \\ -E_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(j_{1,n} \frac{\rho}{a}\right) \exp\left(j_{1,n} \frac{z}{a}\right) + B & (z < 0) \end{cases} \quad (13)$$

ここで、 $E_0 = \frac{I_0}{\pi \sigma a^2}$ とした。

4.2 境界条件と電位

$z = 0$ で電位 ϕ は連続であるから、

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(j_{1,n} \frac{\rho}{a}\right) + B = 0 \quad (14)$$

(14)式の両辺に ρ をかけて ρ について $(0, a)$ の範囲で積分すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^a d\rho \rho J_0\left(j_{1,n} \frac{\rho}{a}\right) + B \int_0^a d\rho \rho = \frac{a^2}{2} B = 0 \quad (15)$$

同様に、式の両辺に $\rho J_0\left(j_{1,m} \frac{\rho}{a}\right)$ をかけて ρ について $(0, a)$ の範囲で積分すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^a d\rho \rho J_0\left(j_{1,m} \frac{\rho}{a}\right) J_0\left(j_{1,n} \frac{\rho}{a}\right) + \int_0^a d\rho \rho J_0\left(j_{1,m} \frac{\rho}{a}\right) = \frac{a^2}{2} [J_0(j_{1,m})]^2 A_m = 0 \quad (16)$$

よって、 $A_n = 0, B = 0$ なので求める電位は、

$$\phi(\rho, z) = \begin{cases} 0 & (z > 0) \\ -E_0 z = -\frac{I_0 z}{\pi \sigma a^2} & (z < 0) \end{cases} \quad (17)$$

4.3 完全導体内部の電流分布

完全導体内部の電流も渦なしであるから、電流密度ポテンシャル ϕ を考えられる。この ϕ も Laplace 方程式に従うので、

$$\phi(\rho, z) = \int_0^{\infty} d\lambda A(\lambda) J_0(\lambda \rho) e^{-\lambda z} \quad (18)$$

とできる。

1. 完全導体と導線が接している $z = 0$ で電流密度の z 成分は連続である。

2. 完全導体の $\rho > a$ においては、表面 ($z = 0$) に垂直な電流成分はない。

が境界条件なので、

$$-\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \int_0^{\infty} d\lambda A(\lambda) \lambda J_0(\lambda \rho) = \theta(a - \rho) \sigma E_0 = \theta(a - \rho) \frac{I_0}{\pi a^2} \quad (19)$$

(19)式の両辺に $\rho J_0(\mu \rho)$ をかけて ρ について、 $(0, \infty)$ で積分し、Bessel 関数の直交性を用いると、

$$A(\mu) = \frac{I_0}{\pi a^2} \frac{a J_1(\mu a)}{\mu} \quad (20)$$

となる。これから、

$$\phi(\rho, z) = \frac{I_0}{\pi a} \int_0^{\infty} d\lambda \frac{J_1(\lambda a)}{\lambda} J_0(\lambda \rho) e^{-\lambda z} \quad (21)$$

4.4 電流分布

導線及び完全導体内部の電流密度は、

$$j_{\rho}(\rho, z) = -\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \Big|_{z>0} = \frac{I_0}{\pi a^2} \theta(z) \int_0^{\infty} du J_1(u) J_1\left(u \frac{\rho}{a}\right) \exp\left(-u \frac{z}{a}\right) \quad (22)$$

$$j_z(\rho, z) = -\sigma \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z > 0} \tag{23}$$

$$= \frac{I_0}{\pi a^2} \left[\theta(-z)\theta(a-\rho) + \theta(z) \int_0^\infty du J_1(u) J_0\left(u \frac{\rho}{a}\right) \exp\left(-u \frac{z}{a}\right) \right]$$

さらに、(22)、(23)式の積分は、文献[6,7]によれば第1種完全楕円積分 $K(k)$ 、第2種完全楕円積分 $E(k)$ を用いて以下のように表せる。

$$\int_0^\infty d\lambda J_1(\lambda a) J_1(\lambda \rho) e^{-\lambda z} = \frac{2}{\pi k \sqrt{a\rho}} \left(\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) E(k) - K(k) \right) \tag{24}$$

$$\int_0^\infty d\lambda J_1(\lambda a) J_0(\lambda \rho) e^{-\lambda z} = \frac{kz}{2\pi a \sqrt{a\rho}} K(k) - \frac{\text{sgn}(a-\rho)}{\pi a} \Lambda(n, k) + \frac{\theta(a-\rho)}{a} \tag{25}$$

ここで、母数 $k = \sqrt{\frac{4a\rho}{(a+\rho)^2 + z^2}}$ 、 $n = \frac{4a\rho}{(a+\rho)^2}$ とした。また、 $\Lambda(n, k)$ は Heuman の Lambda 関数と呼ばれるもので、第3種完全楕円積分 $\Pi(n, k)$ を用いて、

$$\Lambda(n, k) = \frac{|a-\rho|}{a+\rho} \frac{z}{\sqrt{(a+\rho)^2 + z^2}} \Pi(n, k) \tag{26}$$

と定義されている。

このようにして得られた電流密度を gnuplot^{*1}を用いて視覚化したものを図2、流れの向きを図3にそれぞれ示す。

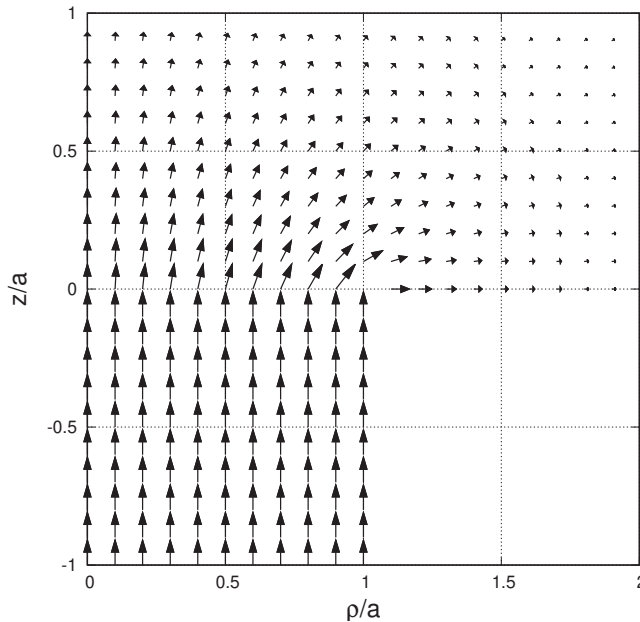


図2: 導線内及び完全導体内の電流分布の様子。横軸 ρ/a 、縦軸 z/a で規格化してあ

^{*1}gnuplot, <http://www.gnuplot.info/>

る。 $z < 0$ では $\rho/a < 1$ が導線の範囲である。なお、 $\rho = a, z = 0$ では(22)式が対数的に発散するため示していない。

念のため、 $z > 0$ の領域で電流が保存しているか確認してみる。半径 $b > a$ 、高さ $z_0 > 0$ の円筒表面から外へ流れ出る全電流 I を計算する。

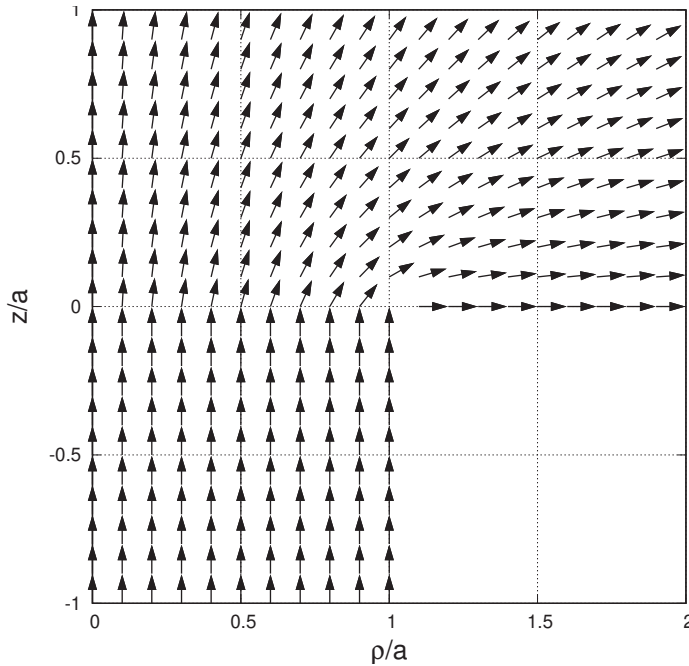


図3: 導線内及び完全導体内の電流の流れの向きの様子。

$$\begin{aligned}
 I &= 2\pi b \int_0^{z_0} dz j_\rho(b, z) + 2\pi \int_0^b d\rho \rho j_z(\rho, z_0) \\
 &= I_0 \frac{2b}{a^2} \left[\int_0^\infty du J_1(u) J_1(ub/a) \int_0^{z_0} dz e^{-uz/a} + \int_0^\infty du J_1(u) e^{-uz_0/a} \int_0^b d\rho \rho J_0(u\rho/a) \right] \\
 &= I_0 \frac{2b}{a^2} \left[\int_0^\infty du \frac{J_1(u) J_1(ub/a)}{u} (1 - e^{-uz_0/a}) + \int_0^\infty du \frac{J_1(u) J_1(ub/a)}{u} e^{-uz_0/a} \right] \\
 &= I_0 \frac{2b}{a^2} \int_0^\infty du \frac{J_1(u) J_1(ub/a)}{u} = I_0
 \end{aligned}$$

(27)

確かに全電流は保存されている。ここで、文献[4]の198ページにある以下の積分公式を用いた。

$$\int_0^\infty dx \frac{J_\nu(ax)J_\nu(bx)}{x} = \frac{a^\nu}{2\nu b^\nu}, \quad (\operatorname{Re}\nu > 0, b \geq a > 0) \quad (28)$$

また、 $z = 0$ の導線と完全導体の境界でガウスの法則を適用すると、境界にある電荷密度 σ_e は、

$$\sigma_e = \varepsilon_0(E_z(\rho, +0) - E_z(\rho, -0)) = -\frac{\varepsilon_0 I_0}{\pi \sigma a^2} \quad (29)$$

となる。境界にある全電荷は、 $Q = \pi a^2 \sigma_e = -\frac{\varepsilon_0 I_0}{\sigma}$ である。

これらの結果から、以下のことがわかる。

- 導線内部には導線の軸方向のみに一様な電場が存在し、それに沿って電流が流れている。
- 完全導体内部の電場は 0 であるが、電流は導線との境界から広がるように流れる。
- 導線と完全導体の境界には電荷が存在し、その電荷により導体内部の電場は全て吸収され、完全導体内部に電場は存在しない。

5 半径の異なる導線が接続されている境界付近の電流分布

5.1 問題設定

図 4 のように、伝導率が σ で、半径 $a, b (a < b)$ の円柱導体が軸を共有し、 $z = 0$ で接合されていて、 z 軸の正の向きに時間変化しない定常電流 I_0 が流れている状況を考える。

導体内部の $z < 0$ の電位を ϕ_1 、 $z > 0$ の電位を ϕ_2 とし、電場については、 $\mathbf{E}^{(1)} = -\nabla\phi_1$ 、 $\mathbf{E}^{(2)} = -\nabla\phi_2$ とする。導体の対称性から円筒座標 (ρ, φ, z) をとる。

5.2 境界条件

導体表面では電流が導体に沿って流れなければならないため、導体表面に垂直な向きの電場は 0 である。

$$E_\rho^{(1)}(a, z < 0) = -\frac{\partial\phi_1}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a, z<0} = 0 \quad (30)$$

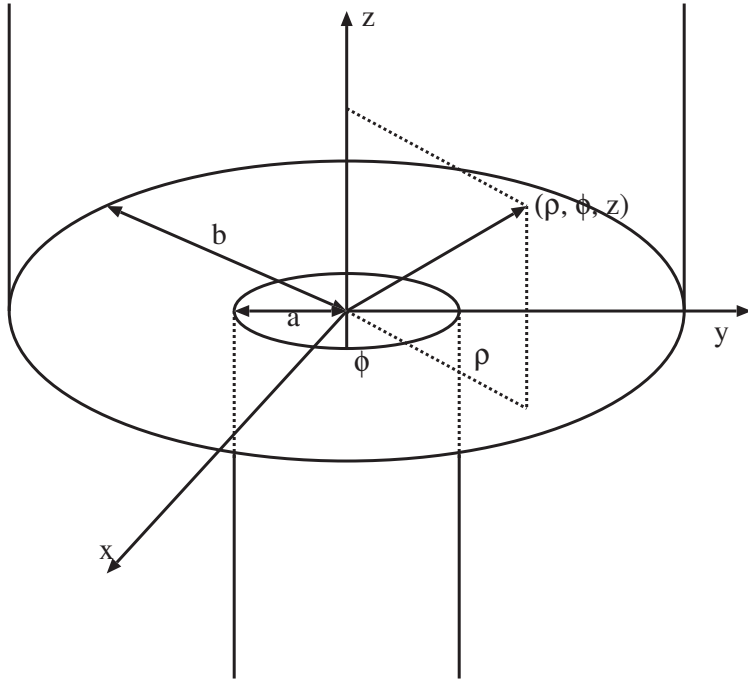


図4: 電気伝導率 σ 、半径 a, b の導線が $z = 0$ で接合されている。

$$E_{\rho}^{(2)}(b, z > 0) = -\frac{\partial \phi_2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b, z>0} = 0 \quad (31)$$

$$E_z^{(2)}(a < \rho < b, 0) = -\frac{\partial \phi_2}{\partial z} \Big|_{a < \rho < b, z=0} = 0 \quad (32)$$

また、 $z = 0$ で電位は連続でなめらかでなければならないから、

$$\phi_1(\rho < a, 0) = \phi_2(\rho < a, 0) \quad (33)$$

$$E_{\rho}^{(1)}(\rho < a, 0) = -\frac{\partial \phi_1}{\partial \rho} \Big|_{\rho < a, z=0} = E_{\rho}^{(2)}(\rho < a, 0) = -\frac{\partial \phi_2}{\partial \rho} \Big|_{\rho < a, z=0} \quad (34)$$

$$E_z^{(1)}(\rho < a, 0) = -\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{\rho < a, z=0} = E_z^{(2)}(\rho < a, 0) = -\frac{\partial \phi_2}{\partial z} \Big|_{\rho < a, z=0} \quad (35)$$

5.3 係数の決定

境界条件(30)、(31)式を満たすためには、導線表面での法線微分が0になるように ϕ_1 、 ϕ_2 を決める必要があるため、先ほどと同様に、 J_0 の微分である1次の Bessel 関数 J_1 の零点 $j_{1,n}$ を用いて、 ϕ_1 、 ϕ_2 を Dini 展開する。

円柱導体の中心軸 $\rho = 0$ で電位が特異的であってはならないから、(4)式の原点で

特異的な Y_0 や $\log \rho$ を含む項は排除される。すると、

$$\phi_1(\rho < a, z < 0) = -E_0 z + E_0 a \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(j_{1,n} \frac{\rho}{a}\right) \exp\left(j_{1,n} \frac{z}{a}\right) + E_0 b C \quad (36)$$

$$\phi_2(\rho < b, z < 0) = -E_0 \frac{a^2}{b^2} z + E_0 b \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0\left(j_{1,n} \frac{\rho}{b}\right) \exp\left(-j_{1,n} \frac{z}{b}\right) \quad (37)$$

ここで、 $z \rightarrow -\infty$ のときの電場 E_0 を用いて求める係数が無次元になるように考慮した。

なお、電場 E_0 は(1)式から、 $E_0 = \frac{I_0}{\pi a^2 \sigma}$ となることがわかる。同様に、 $z \rightarrow \infty$ で

は電場が $E_0 \frac{a^2}{b^2} = \frac{I_0}{\pi b^2 \sigma}$ となる。

電位から電場を求めると、

$$E_\rho^{(1)}(\rho < a, z < 0) = -\frac{\partial \phi_1}{\partial \rho} = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n j_{1,n} J_1\left(j_{1,n} \frac{\rho}{a}\right) \exp\left(j_{1,n} \frac{z}{a}\right) \quad (38)$$

$$E_\rho^{(2)}(\rho < b, z > 0) = -\frac{\partial \phi_2}{\partial \rho} = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n j_{1,n} J_1\left(j_{1,n} \frac{\rho}{b}\right) \exp\left(-j_{1,n} \frac{z}{b}\right) \quad (39)$$

$$E_z^{(1)}(\rho < a, z < 0) = -\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = E_0 - E_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n j_{1,n} J_0\left(j_{1,n} \frac{\rho}{a}\right) \exp\left(j_{1,n} \frac{z}{a}\right) \quad (40)$$

$$E_z^{(2)}(\rho < b, z > 0) = -\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = E_0 \frac{a^2}{b^2} + E_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n j_{1,n} J_0\left(j_{1,n} \frac{\rho}{b}\right) \exp\left(-j_{1,n} \frac{z}{b}\right) \quad (41)$$

境界条件(33)-(35)式と電場の表式(38)-(41)式から、係数 A_n, B_n, C を決定する以下の(42)-(44)式を得る。

$$a \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(j_{1,n} \frac{\rho}{a}\right) + b C = b \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0\left(j_{1,n} \frac{\rho}{b}\right) \quad (42)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n j_{1,n} J_1\left(j_{1,n} \frac{\rho}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n j_{1,n} J_1\left(j_{1,n} \frac{\rho}{b}\right) \quad (43)$$

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n j_{1,n} J_0\left(j_{1,n} \frac{\rho}{a}\right) = \frac{a^2}{b^2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n j_{1,n} J_0\left(j_{1,n} \frac{\rho}{b}\right) \quad (44)$$

(42)式の両辺に ρ をかけて、 ρ について $(0, a)$ の区間で積分すると、

$$C = \frac{b}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1\left(j_{1,n} \frac{a}{b}\right)}{j_{1,n}} B_n \quad (45)$$

(43)式の両辺に $\rho J_1(j_{1,m} \rho/a)$ をかけて、 ρ について $(0, a)$ の区間で積分すると、

$$A_m = -\frac{1}{J_0(j_{1,m})} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1\left(j_{1,n} \frac{a}{b}\right) j_{1,n}}{j_{1,m}^2 - j_{1,n}^2 \frac{a^2}{b^2}} B_n \quad (46)$$

境界条件(32)と(44)式を考えるため、(44)式の両辺に $\rho J_0(j_{1,m}\rho/b)$ をかけて、 ρ について $(0, b)$ の区間で積分する。ただし、(44)式の左辺は $\rho > a$ のときは0であることを考慮し、積分区間は $(0, a)$ となることに注意する。すると、

$$B_m = \frac{a}{b} \frac{2J_1\left(j_{1,m}\frac{a}{b}\right)}{j_{1,m}^2 - J_0^2(j_{1,m})} \left[1 + \frac{a^2}{b^2} j_{1,m}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_{1,n} J_0(j_{1,n})}{j_{1,n}^2 - j_{1,m}^2 \frac{a^2}{b^2}} A_n \right] \quad (47)$$

ここで、

$$B_n = \frac{a}{b} \frac{2J_1\left(j_{1,n}\frac{a}{b}\right)}{j_{1,n}^2 J_0^2(j_{1,n})} D_n \quad (48)$$

と新しい係数 D_n を設定し、(46)式も用いると(47)式は次のように変形できる。

$$D_l = 1 - \frac{a^3}{b^3} j_{1,l}^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_{1,n}}{\left(j_{1,n}^2 - j_{1,l}^2 \frac{a^2}{b^2}\right) \left(j_{1,n}^2 - j_{1,m}^2 \frac{a^2}{b^2}\right)} \right] \frac{4J_1^2\left(j_{1,m}\frac{a}{b}\right)}{j_{1,m} J_0^2(j_{1,m})} D_m \quad (49)$$

ここで、 $l = 1, 2, 3, \dots$ とする。

(49)式をさらに変形すると、

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \delta_{lm} + \frac{a^3}{b^3} j_{1,l}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_{1,n}}{\left(j_{1,n}^2 - j_{1,l}^2 \frac{a^2}{b^2}\right) \left(j_{1,n}^2 - j_{1,m}^2 \frac{a^2}{b^2}\right)} \right\} \frac{4J_1^2\left(j_{1,m}\frac{a}{b}\right)}{j_{1,m} J_0^2(j_{1,m})} D_m = 1 \quad (50)$$

行列 M を次のように定め、

$$M_{lm} = \delta_{lm} + \frac{a^3}{b^3} j_{1,l}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_{1,n}}{\left(j_{1,n}^2 - j_{1,l}^2 \frac{a^2}{b^2}\right) \left(j_{1,n}^2 - j_{1,m}^2 \frac{a^2}{b^2}\right)} \frac{4J_1^2\left(j_{1,m}\frac{a}{b}\right)}{j_{1,m} J_0^2(j_{1,m})} \quad (51)$$

D_n をベクトル \mathbf{D} の成分だと考えれば、 $\mathbf{MD} = \mathbf{1}$ という連立方程式となり、 \mathbf{D} が求められる。

5.4 電位と電場の決定

(50)式で決まる係数 D_n を用いて電位を整理すると、

$$\phi_1(\rho, z) = -E_0 z - E_0 \frac{a^2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} E_m \frac{J_0\left(j_{1,m}\frac{\rho}{a}\right) \exp\left(j_{1,m}\frac{z}{a}\right)}{J_0(j_{1,m})} + E_0 b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4J_1^2\left(j_{1,m}\frac{a}{b}\right)}{j_{1,m}^3 J_0^2(j_{1,m})} D_m \quad (52)$$

$$E_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_1^2\left(j_{1,n}\frac{a}{b}\right)}{j_{1,n}J_0^2(j_{1,n})\left(j_{1,m}^2 - j_{1,n}^2\frac{a^2}{b^2}\right)} D_n \quad (53)$$

$$\phi_2(\rho, z) = -E_0\frac{a^2}{b^2}z + E_0a \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2J_1\left(j_{1,m}\frac{a}{b}\right)}{j_{1,m}J_0^2(j_{1,m})} D_m J_0\left(j_{1,m}\frac{\rho}{b}\right) \exp\left(-j_{1,m}\frac{z}{b}\right) \quad (54)$$

52)、54式から電場を求めると、

$$E_\rho^{(1)}(\rho, z) = E_0\frac{a}{b} \sum_{m=1}^{\infty} E_m \frac{j_{1,m}J_1\left(j_{1,m}\frac{\rho}{a}\right) \exp\left(j_{1,m}\frac{z}{a}\right)}{J_0(j_{1,m})} \quad (55)$$

$$E_\rho^{(2)}(\rho, z) = E_0\frac{a}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2J_1\left(j_{1,m}\frac{a}{b}\right)}{j_{1,m}J_0^2(j_{1,m})} D_m J_1\left(j_{1,m}\frac{\rho}{b}\right) \exp\left(-j_{1,m}\frac{z}{a}\right) \quad (56)$$

$$E_z^{(1)}(\rho, z) = E_0 + E_0\frac{a}{b} \sum_{m=1}^{\infty} E_m \frac{j_{1,m}J_0\left(j_{1,m}\frac{\rho}{a}\right) \exp\left(j_{1,m}\frac{z}{a}\right)}{J_0(j_{1,m})} \quad (57)$$

$$E_z^{(2)}(\rho, z) = E_0\frac{a^2}{b^2} + E_0\frac{a}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2J_1\left(j_{1,m}\frac{a}{b}\right)}{j_{1,m}J_0^2(j_{1,m})} D_m J_0\left(j_{1,m}\frac{\rho}{b}\right) \exp\left(-j_{1,m}\frac{z}{b}\right) \quad (58)$$

5.5 数値計算による結果

数値計算により、 $j_{1,n}$ を2,000個ほど求めた後、Gauss-Seidel法により係数 D を計算し、電位 ϕ と電場 E を数値的に求めた。このようにして求めた導線内の等電位線を図5、電流分布を図6、流れの向きを図7にそれぞれ示す。

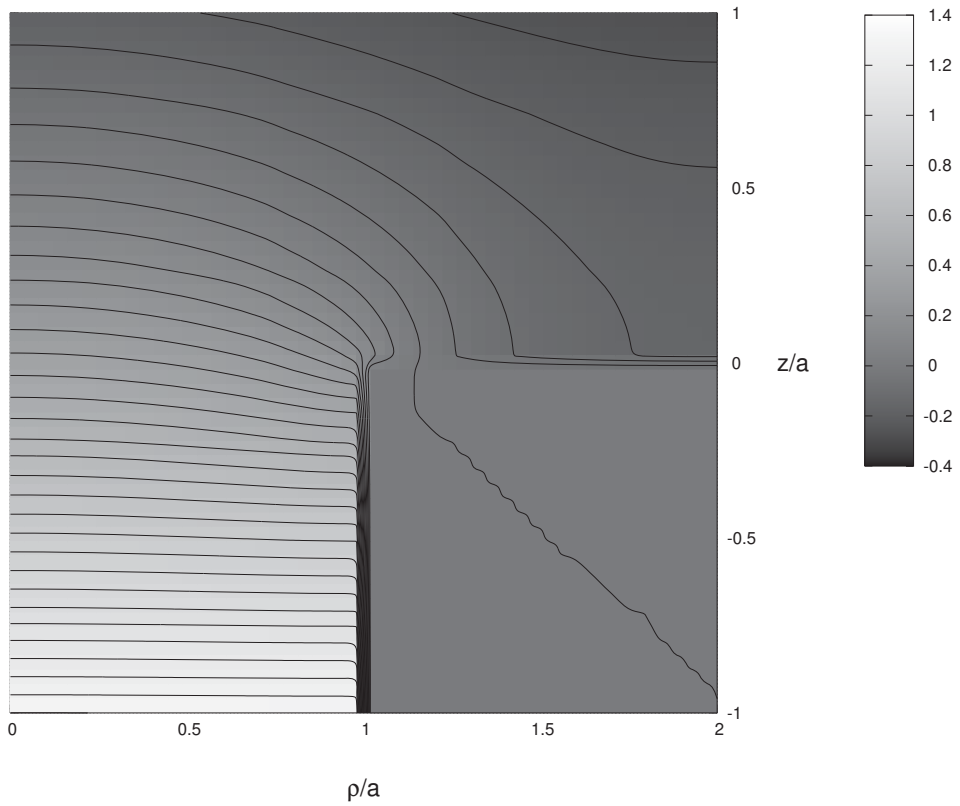


図5: 導線内の等電位線の様子。導線の半径は $a = 1, b = 2$ とした。なお、 $\rho > a, z < 0$ の範囲は計算していないためグラフとしては意味がない領域である。

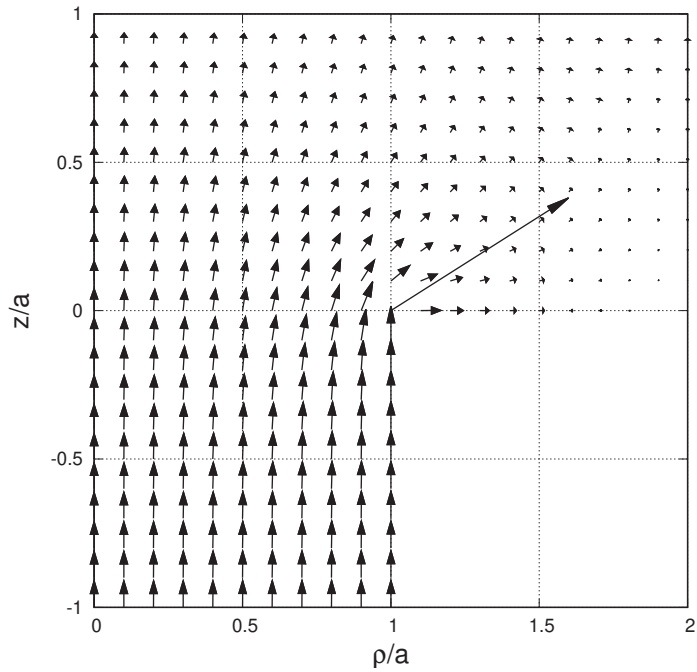


図6: 導線内の電流分布の様子。 $\rho = a, z = 0$ では電流が特に大きい様子がわかる。

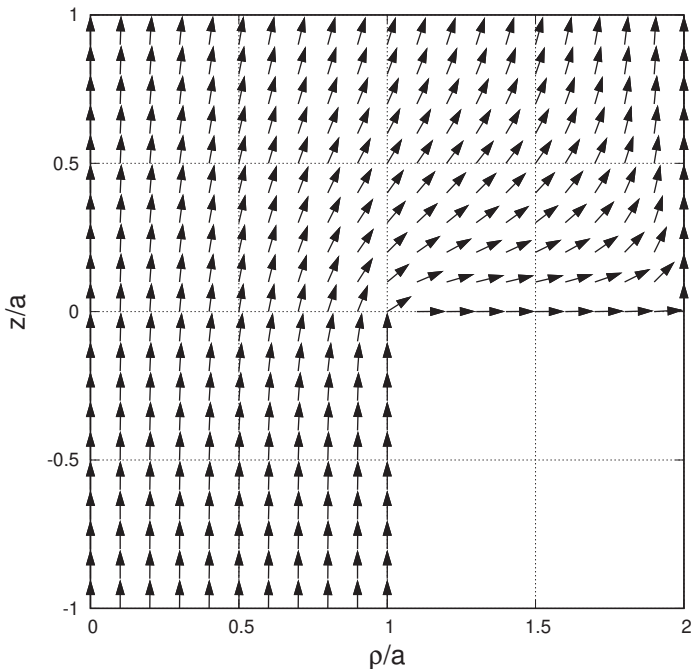


図7: 導線内の電流の流れの向きの様子。導線表面に対して平行、 $z < 0$ でも ρ 方向

の成分があることに注意。

6 まとめと今後の課題

Bessel 関数を用いた Dini 展開により、導線内の電流分布を計算することができた。現在、2 番目の問題で $b \rightarrow \infty$ とした場合を計算中である。この場合、級数が積分に置き換わるが、その積分の処理をどのように行うかが 1 つ目の課題である。Struve 関数や不完全 Bessel 関数を活用することにより、ある程度解析的に扱えるのではないかというのが現在の見通しである。

今回は導線内の電流分布を考えたが、電磁エネルギーの流れを考察するためには導線外部の電磁場を調べる必要がある。こちらについては解析的な考察が不十分であるため、これを 2 つ目の課題としたい。

Laplace 方程式を直接的に数値計算してしまうのも方法としては手っ取り早いのであるが、物理的な考察や、その後の展開を考えたときに見通しが悪い。今回のような解析的に扱うという方法を活用しながら、さらに研究を進めたい。

参考文献

- [1] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, "Table of Integrals, Series, and Products Seventh Edition", Academic Press (2007).
- [2] National Institute of Standards and Technology (NIST), Digital Library of Mathematical Functions, <https://dlmf.nist.gov/>, (2018年10月16日閲覧)
- [3] G. N. Watson, "A Treatise on the Theory of Bessel Functions", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1944.
- [4] 森口繁一、宇田川銈久、一松信、「岩波数学公式Ⅲ－特殊関数」、岩波書店、1960年
- [5] 寺沢寛一、「自然科学者のための数学概論（増訂版）」、岩波書店、1983年
- [6] G. Eason, B. Noble and I.N. Sneddon."On certain integrals of Lipschitz-Hankel type involving products of Bessel functions", Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 247, p. 529-551, 1955.
- [7] Kausel, Eduardo, and Mirza M. Irfan Baig. "Laplace Transform of Products of Bessel Functions: A Visitation of Earlier Formulas.", Quarterly of Applied Mathematics 70(1): 77-97, 2012.

