

離散時間線形モデルのあてはめによる改訂パワースペクトル密度の推定

竹 安 数 博

A Revised Estimation Method of Power Spectrum Under the Application of ARMA Model

Kazuhiro TAKEYASU

要 旨

パワースペクトル密度の推定を行う方法として実用されているものは、3種類に大別される。第1はWiener-Khintchineの関係式を用いる方法で、標準法あるいは相関変換法と呼ばれる。第2は高速フーリエ変換法（FFT法）である。推定精度については両方とも同程度であるが、計算時間の点ではFFT法がやや優れている。第3の方法は赤池によるFPE（Final Prediction Error）法と呼ばれる方法であって、上の2法に比べて推定精度の点で優れている。FPE法はそのパワースペクトル密度を推定しようとしている不規則過程を自己回帰過程であるとして解析するものであり、真の過程が自己回帰—移動平均過程（ARMA過程）である場合には原理的にある程度の偏り誤差が生ずるのはやむを得ない。

筆者らはこれらをARMA過程に拡張すべく取り組んだ。拡張Yule-Walker方程式を用いるとARMA過程におけるAR部のパラメータ推定値及び自己相関関数推定値だけを用いてパワースペクトル密度推定ができることを導き、その数式を導出した。これにより、ARMA過程から生成されたデータを元にパワースペクトル密度を推定すると、FPE法により特に低周波領域において良好な結果を得た。

本論文では、AR過程においても拡張Yule-Walker方程式に加えYule-Walker方程式も加味した新たなパワースペクトル密度推定式を導出、提案する。以前筆者らが行った取り組みでは、低周波領域におけるパワースペクトル密度の推定精度向上が図られた。今回の改善ではYule-Walker方程式部分の取り込みが完全なものとなり、さらなる推定精度の向上が図られる。今後は様々なケースで検定することの他、ARIMA過程などにも本手法を適用するなど、適用範囲の拡大を図りたいと考えている。

Abstract

In estimating power spectrum density, there are three major estimating methods. One is a standard method which utilizes Wiener-Khintchine equation. The second one is a FFT (Fast Fourier Transform) method. The third one is a FPE (Final Prediction Error) method which was proposed by Akaike. FPE method is the method which fits Autoregressive (AR) model to the original time series and thereby holds biased error when the process is generated by Autoregressive Moving Average (ARMA) process. In the former paper, this method was extended to ARMA process by us. By utilizing Yule-Walker equation, the new equation of estimating the power spectrum density was derived. It can be stated by using only AR part parameters and autocorrelation function. Good estimation result of power spectrum density was obtained especially in the lower frequency part compared with FPE method. In this paper, the new equation of estimating the power spectrum density is proposed. This new method utilizes full part of Yule-Walker equation as well as Extended Yule-Walker equation and much more exquisite estimation of power spectrum density can be achieved. This method should be extended to the ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) process in the near future.

キーワード：パワースペクトル、ARMAモデル、ARモデル、Yule-Walker方程式、推定

1. はじめに

パワースペクトル密度の推定を行う方法として実用されているものは、3種類に大別される。第1は Wiener-Khintchine の関係式を用いる方法で、標準法あるいは相関変換法と呼ばれる [1]。第2は高速フーリエ変換法 (FFT 法) である [2]。推定精度については両方とも同程度であるが、計算時間の点では FFT 法がやや優れている。第3の方法は赤池による FPE (Final Prediction Error) 法 [3] と呼ばれる方法であって、上の2法に比べて推定精度の点で優れている。FPE 法はそのパワースペクトル密度を推定しようとしている不規則過程を自己回帰過程であるとして解析するものであり [4]、真の過程が自己回帰—移動平均過程 (ARMA 過程) である場合には原理的にある程度の偏り誤差が生ずるのはやむを得ない。

定常エルゴード的不規則過程の一つの標本関数 $y(t)$ が与えられたとき、この過程の自己相関関数およびパワースペクトル密度は

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)y(t+\tau) dt \quad (1)$$

$$S(w) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-jw\tau} d\tau \quad (2)$$

によって与えられる。 $\tau = 0, \Delta, 2\Delta, \dots$ における $R(\tau)$ のみが知られているときには、(2) 式の近似値として

$$\bar{S}(w) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{-jwn\Delta} \quad (3)$$

を計算する。ただし、 $R_n = R(n\Delta)$ とした。この近似では aliasing 誤差が導入される。この誤差は偏り誤差であって統計的なものではない。数値的にスペクトル密度を求めようとする場合には、この誤差はやむを得ないのであって、今後は (3) 式を離散時間系パワースペクトル密度と呼ぶことにし、これからの誤差を論ずることにする。

標準法では (3) 式をさらに二つの段階で近似する。すなわち、

$$\bar{\bar{S}}(w) = \Delta \sum_{n=-M}^M R_n w_n e^{-jwn\Delta} \quad (4)$$

$$\hat{S}(w) = \Delta \sum_{n=-M}^M \hat{R}_n w_n e^{-jwn\Delta} \quad (5)$$

と近似する。ただし

$$\hat{R}_l = \frac{1}{N-l} \sum_{i=1}^{N-l} y_i y_{i+l}, \quad \hat{R}_{-l} = \hat{R}_l \quad (l \geq 0) \quad (6)$$

であり、また $y_n = y(n\Delta)$, $w_n = w(n\Delta)$ とした。 $w(t)$ はラグウインドである。(4) 式の近似では明らかに打ち切りによる偏り誤差が生ずる。(5) 式の近似では統計的誤差が導入される。 $\hat{S}(w)$ のみがコンピュータで計算可能である。

FFT 法は計算原理は標準法と異なるが、統計的誤差と偏り誤差とが互いに矛盾したことを計算法に要求する点ではまったく同様である。

$\{y_t\}$ が平均値 0 の定常正規エルゴード的 AR 過程の一つの標本時系列であったとしよう。すなわち、

$$y_t + \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_n y_{t-n} = u_t \quad (7)$$

$$(t = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

であって、 $\{u_t\}$ は平均値 0、分散 σ^2 の定常正規白色時系列とする。(7) 式のような構造をもった AR 過程の離散時間系スペクトル密度は、

$$\bar{S}(w) = \frac{\sigma^2 \Delta}{\left| 1 + \alpha_1 e^{-jw\Delta} + \alpha_2 e^{-j2w\Delta} + \dots + \alpha_n e^{-jnw\Delta} \right|^2} \quad (8)$$

で与えられる。

しかし、もし解析している過程が ARMA 過程である場合には、これと等価な AR 過程を考えるとときには一般に $n = \infty$ となり、これを有限項 M で打切るので、この打ち切りによる偏り誤差が導入される。

次数 M については FPE 法が知られている。

筆者らは拡張 Yule-Walker 方程式を用いると ARMA 過程における AR 部のパラメータ推定値及び自己相関関数推定値だけを用いてパワースペクトル密度推定式を導出した。

これにより、ARMA 過程から生成されたデータを元にパワースペクトル密度を推定すると、FPE 法により特に低周波領域において良好な結果を得た [5]。

本論文では、AR 過程においても拡張 Yule-Walker 方程式に加え Yule-Walker 方程式も加味した新たなパワースペクトル密度推定式を導出、提案する。

2. AR 過程の相関関数とスペクトル密度

y_t の自己相関関数を

$$R_l = E[y_t y_{t+l}]$$

とすると、AR 過程では周知のように Yule-Walker 方程式 (9)、拡張 Yule-Walker 方程式 (10) を満たす。

$$\begin{aligned} R_1 + \alpha_1 R_0 + \alpha_2 R_1 + \cdots + \alpha_n R_{n-1} &= 0 & (9-1) \\ R_2 + \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_0 + \cdots + \alpha_n R_{n-2} &= 0 & (9-2) \\ \vdots & & \\ R_n + \alpha_1 R_{n-1} + \alpha_2 R_{n-2} + \cdots + \alpha_n R_0 &= 0 & (9-n) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} R_1 + \alpha_1 R_0 + \alpha_2 R_1 + \cdots + \alpha_n R_{n-1} &= 0 \\ R_2 + \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_0 + \cdots + \alpha_n R_{n-2} &= 0 \\ \vdots & \\ R_n + \alpha_1 R_{n-1} + \alpha_2 R_{n-2} + \cdots + \alpha_n R_0 &= 0 \end{aligned}} \right\} (9)$$

$$\begin{aligned} R_{n+1} + \alpha_1 R_n + \alpha_2 R_{n-1} + \cdots + \alpha_n R_1 &= 0 & (10-1) \\ R_{n+2} + \alpha_1 R_{n+1} + \alpha_2 R_n + \cdots + \alpha_n R_2 &= 0 & (10-2) \\ \vdots & & \\ R_{n+l} + \alpha_1 R_{n+l-1} + \alpha_2 R_{n+l-2} + \cdots + \alpha_n R_l &= 0 & (10-l) \\ \vdots & & \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} R_{n+1} + \alpha_1 R_n + \alpha_2 R_{n-1} + \cdots + \alpha_n R_1 &= 0 \\ R_{n+2} + \alpha_1 R_{n+1} + \alpha_2 R_n + \cdots + \alpha_n R_2 &= 0 \\ \vdots & \\ R_{n+l} + \alpha_1 R_{n+l-1} + \alpha_2 R_{n+l-2} + \cdots + \alpha_n R_l &= 0 \end{aligned}} \right\} (10)$$

(9) 式 (10) 式について、上から順次 $e^{-jw\Delta}$ ($l=1,2,\dots,\infty$) をかけて和をとると、(9) 式、(10) 式は $R_l = R_{-l}$ のため $\alpha_0 = 1$ として

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k R_{l-k} = 0 \quad (l=1,2,\dots) \quad (11)$$

と表せるから

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \alpha_k R_{l-k} e^{-jw\Delta} = 0 \quad (12)$$

$$Q(w) = \sum_{l=1}^{\infty} R_l e^{-jw\Delta} \quad (13)$$

とおくと、(12) 式は

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k e^{-jwk\Delta} Q(w) + \sum_{l=1}^n \sum_{k=l}^n \alpha_k R_{k-l} e^{-jwl\Delta} = 0 \quad (14)$$

となる。

$$Q(w) = - \frac{\sum_{l=1}^n \sum_{k=l}^n \alpha_k R_{k-l} e^{-jwl\Delta}}{\sum_{k=0}^n \alpha_k e^{-jwk\Delta}} \quad (15)$$

(3) 式と (13) 式の比較より

$$\bar{S}(w) = \Delta \{ Q(w) + Q^*(w) + R_0 \} \quad (16)$$

である。

3. 拡張 Yule-Walker 方程式のみを活用した場合との比較

筆者らの過去の取り組みでは [5]、下記のように計算している。平均値 0 の定常正規エルゴード過程 $y(t)$ の標本時系列 $\{y_t\}$ が

$$\left. \begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + Bu_{t+1} \\ y_t &= C'x_t \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

によって表現される仮定しよう。ただし A, B, C はそれぞれ $n \times n, n \times r, n \times 1$ の定数行列であり、 x_t は $n \times 1$ の状態ベクトルとする。 u_t は $r \times 1$ の入力ベクトルであって、その要素 $u_t^1, u_t^2, \dots, u_t^r$ は互いに独立な平均値 0、分散 1 の定常正規白色時系列とする。

さて、(17) 式より x_t を消去すると、

$$y_{t+n} + \alpha_1 y_{t+n-1} + \dots + \alpha_n y_t = \gamma'_0 u_{t+n} + \gamma'_1 u_{t+n-1} + \dots + \gamma'_{n-1} u_{t+1} \quad (18)$$

を得る。ただし、 r 次元ベクトル γ_i は

$$\left. \begin{aligned} \gamma'_0 &= C'B \\ \gamma'_1 &= C'(A + \alpha_1 I_n)B \\ &\vdots \\ \gamma'_{n-1} &= C'(A^{n-1} + \alpha_1 A^{n-2} + \dots + \alpha_{n-2} A + \alpha_{n-1} I_n)B \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

である。(18) 式の y_t は r 個の入力をもつ場合に拡張された一般化 ARMA 過程といえよう。(17) 式より y_t の自己相関関数は

$$R_l = E[y_t y_{t+l}] = C' A^l E[x_t x_t'] C \quad (20)$$

となる。ゆえに

$$R_{n+l} + \alpha_1 R_{n+l-1} + \dots + \alpha_n R_l = 0 \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (21)$$

を得る。

さて、(21) 式に $e^{-jwl\Delta}$ を乗じ、 $l=0$ から ∞ までの和をとると、

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k e^{jw(n-k)\Delta} \left\{ Q(w) - \sum_{l=0}^{n-k-1} R_l e^{-jwl\Delta} \right\} = 0 \quad (22)$$

を得る。ただし、

$$Q(w) = \sum_{l=0}^{\infty} R_l e^{-jwl\Delta} \quad (23)$$

とおいた。(22) 式より

$$Q(w) = \frac{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=0}^{n-k} \alpha_l R_{n-l-k} \right) e^{jwk\Delta}}{\sum_{l=0}^n \alpha_l e^{jw(n-l)\Delta}} \quad (24)$$

を得る。(3) 式と (23) 式の比較より

$$\bar{S}(w) = \Delta \{ Q(w) + Q^*(w) - R_0 \} \quad (25)$$

である。

(9-1) に $e^{-jw\Delta}$ 、(9-2) に $e^{-jw2\Delta}$ 等と順にかけてゆく。(9) 式 (10) 式を縦方向にみれば、左端が

$$\sum_{i=1}^{\infty} R_i e^{-jwi\Delta} \quad (26)$$

次の項が

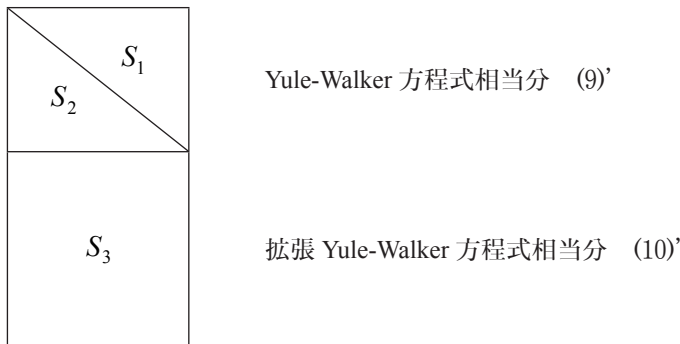
$$\alpha_1 R_0 e^{-jw} + \alpha_1 e^{-jw} \sum_{i=1}^{\infty} R_i e^{-jwi\Delta} \quad (27)$$

$$\alpha_2 R_1 e^{-jw} + \alpha_2 R_0 e^{-jw2\Delta} + \alpha_2 e^{-jw2\Delta} \sum_{i=1}^{\infty} R_i e^{-jwi\Delta} \quad (28)$$

⋮

となってゆく。

(26)、(27)、(28) の右側 \sum で示された項が (14) 式左辺第一項である。つまり、図解すると下記のようなになる。



Yule-Walker 方程式の下三角部分 S_2 と拡張 Yule-Walker 方程式 S_3 の和部分が (14) 式の左辺第一項であり、Yule-Walker 方程式の上三角部分 S_1 が (14) 式の左辺第二項という関係になっている。

一方、筆者らの過去の取り組みでは、(9) 式を用いず (10) 式だけを用いている。 S_2 と S_3 の部分の和から S_2 部分を引いた形となっている。(なお、(21) 式で $l=0$ からスタートさせているため、拡張 Yule-Walker 方程式に (9- n) 式も取り込んでいる。そのため、(15) 式と (22) 式とでは拡張 Yule-Walker 方程式の共通部分は全く同じ式でなく、 $e^{-jw\Delta}$ 分ずつずれた形となっている。なお、 $e^{-jw\Delta}$ をかけるスタート地点が一行ずれたためであって、これは別に本質的な問題では

ない。

前回の取り組みで、低周波領域におけるパワースペクトル密度の推定精度向上が図られたが、今回の改善で、如上のような Yule-Walker 方程式部分の取り込みの完全化により、さらなる推定精度の向上が期待される。

4. パラメータの推定

AR モデルのパラメータ $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ の推定は Yule-Walker 方程式 (9) の解が漸近的に最尤推定であることが知られている [6]。ただし、筆者らの前回の検討で得られたように拡張 Yule-Walker 方程式で自己相関関数をできるだけ多く生かしてパラメータを推定したものをパワースペクトル密度推定に活用すると、低周波領域における推定精度が良くなることが期待される。そこで、前回行った方法も併せ示す。その方法は次の通りである。

統計的誤差を含んだ推定値 \hat{R}_i ($i = 0, 1, \dots, K$) が得られたとき、拡張 Yule-Walker 方程式 (21) を利用して $\{\alpha_s\}$ を推定しよう。最小二乗法を適用する。すなわち

$$\hat{R}_{M+l} + \hat{\alpha}_1 R_{M+l-1} + \dots + \hat{\alpha}_M R_l = \varepsilon_l \quad (l = 0, 1, 2, \dots, L) \quad (29)$$

とにおいて $\sum_{l=0}^L \varepsilon_l^2$ を最小にするように $\{\hat{\alpha}_s\}$ を定める。ただし、 $L + M \leq K$ とする。いま

$$\left. \begin{aligned} \hat{\alpha}(M) &= (\hat{\alpha}_M, \hat{\alpha}_{M-1}, \dots, \hat{\alpha}_1)^T \\ \hat{r}_l &= (\hat{R}_l, \hat{R}_{l+1}, \dots, \hat{R}_{l+L})^T \\ \hat{R}(M) &= (\hat{r}_0, \hat{r}_1, \dots, \hat{r}_{M-1}) \\ \hat{F}(M) &= \hat{R}(M)^T \hat{R}(M) \\ \hat{f}(M) &= \hat{R}(M)^T \hat{r}(M) \\ \hat{g}(M) &= \hat{r}_M^T \hat{r}_M \end{aligned} \right\}$$

などを定義すると、

$$\hat{\alpha}(M) = -\hat{F}^{-1}(M) \hat{f}(M) \quad (30)$$

を得る。

$$\hat{F}^{-1}(M+1) = \frac{1}{\hat{g}(M) + \hat{f}^T(M) \hat{\alpha}(M)} \begin{bmatrix} \{\hat{g}(M) + \hat{f}^T(M) \hat{\alpha}(M)\} \hat{F}^{-1}(M) + \hat{\alpha}^T(M) \hat{\alpha}(M), & \hat{\alpha}(M) \\ \hat{\alpha}^T(M), & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

なる関係がある。したがって、 $M = 1$ から逐次 M を増加させて計算を進める場合は、逆行列の計算を行うことなく $\hat{F}^{-1}(M)$ を得ることができる。

5. 次数の推定

次数の推定として、AR モデルにおいては FPE 法がよく使われており、ここでもその方法で計算すればよい。

6. おわりに

以前筆者らが行った取り組みでは、低周波領域におけるパワースペクトル密度の推定精度向上が図られた。今回の改

善では Yule-Walker 方程式部分の取り込みが完全なものとなり、さらなる推定精度の向上が図られる。今後は様々なケースで検定することの他、ARIMA 過程などにも本手法を適用するなど、適用範囲の拡大を図りたいと考えている。

参考文献

- [1] J.S.Bendat and A.G. Piersol : Random Data, John Wiley & Sons, (1971)
- [2] C.Blingham, M.D.Godfrey and J.W.Tukey : Modern Techniques of Power Spectrum Estimation, IEEE Trans. on AE, AV-15-2 (1967)
- [3] H.Akaike : Fitting Autoregressive Models for Prediction, Annals of Institute of Stat. Math. (1969)
- [4] H.Akaike : Power Spectrum Estimation Through Autoregressive Model Fitting, Annals of Institute of Stat. Math. (1969)
- [5] 得丸英勝、竹安数博 “離散時間線系モデルのあてはめによるスペクトル密度の推定” 計測自動制御学会論文誌、Vol.13, No.2, pp.148-153,1977
- [6] 得丸英勝、添田喬、中溝高好、秋月影雄；計数・測定、培風館、1982

