常葉大学経営学部紀要
第 2 巻第 2 号，2015 年 2 月，21 − 28 頁

離散時間線形モデルの構造特性を活用した改訂 RELS 法

竹　安　数　博

A Revised Recursive Extended Least Square Method for the Identification of ARMA Model

Kazuhiro TAKEYASU

要　旨

システム同定において、ARMA（Autoregressive Moving Average：自己回帰移動平均）モデルや、ARMAX（Autoregressive Moving Average with exogenous input：外生入力自己回帰移動平均）モデル等を用いて、過去の入力信号に基づきシステムパラメータを推定していくやり方が取られる。システムパラメータの不偏推定値を得るアルゴリズムが各種開発されている。

ここではまず数式モデルを示し、次いで問題と課題を整理し、本論文で改善しようとする点について述べる。
(p,q) 次の ARMA モデル（自己回帰移動平均モデル）は、p 次の自己回帰過程と q 次の移動平均過程の組み合わせで表される。
ここで自己回帰過程は、定常エルゴード的正規過程 $x(t)$ の標本時系列の線形結合、移動平均過程は、平均値 0、分散 $\sigma_e^{\ 2}$ の正規性白色雑音の線形結合である。
なお、ARMA モデルは、一般的には ARMAX モデルにおける制御入力を受けないシステムのモデルと言い換えることができる。

ARMA モデルにおけるパラメータの推定に際しては、移動平均過程そのものが有色雑音となっており、通常の最小二乗法を用いてもバイアスのかかった推定値となる。推定値がバイアスを持たないようにするため、拡大最小二乗法、一般化最小二乗法、逐次拡大最小二乗法、逐次最尤法、補助変数法、Gauss-Newton 法、擬似線形回帰法などがある。

本論文では逐次拡大最小二乗法（Recursive Extended Least Square Method：RELS 法）の改善について述べる。

一般の時系列データは制御入力を受けないシステムである場合も多く、本論文ではその場合についての推定時の計算時間短縮法等について、次のような視点で改善を図る。RELS 法においてモデルの構造的な前提からくる a priori knowledge を活用することによって、繰り返し各回の計算時間の短縮がなされるとともに収束も早くなることにより、トータルな計算時間の短縮化が図られる。

Abstract

In making system identification, system parameters are estimated using ARMA (Autoregressive Moving Average) model or ARMAX (Autoregressive Moving Average with exogenous input) model based upon the past signal. Many methods which make unbiased estimate have been developed. In ARMA model, AR process is a linear combination of $x(t)$, which is a sample process of a stationary ergodic Gaussian process and MA process is a linear combination of Gaussian noise. Generally, ARMA model is re-stated as the one which does not have control input in ARMAX model. In estimating ARMA model parameters, MA process itself becomes colored noise and we cannot get unbiased estimate by only using Least Square Method. In order to obtain unbiased estimate, such methods as Extended Least Square Method, Generalized Least Square Method, Recursive Extended Least Square Method (RELS Method), Instrumental Variable Method, Gauss-Newton Method, etc. have been developed. In this paper, a revised Recursive Extended Least Square Method is proposed.

In the general time series, there are many cases that they are not affected by the control input, therefore such cases are discussed in this paper. To shorten the calculation time, the following method is proposed. By utilizing the a priori knowledge, which is obtained from the structural presupposition, a new method which shortens the calculation time is proposed. The effectiveness of this method should be examined in various cases.

1．はじめに

システム同定において、ARMA（Autoregressive Moving Average：自己回帰移動平均）モデルや、ARMAX（Autoregressive Moving Average with exogenous input：外生入力自己回帰移動平均）モデル等を用いて、過去の入力信号に基づきシステムパラメータを推定していくやり方が取られる。システムパラメータの不偏推定値を得るアルゴリズムが各種開発されている。

ここではまず数式モデルを提示し、次いで問題と課題を整理し、本論文で改善しようとする点について述べる。(p,q)次の ARMA モデル（自己回帰移動平均モデル）は

$$x_n + \sum_{i=1}^{p} a_i x_{n-i} = e_n + \sum_{j=1}^{q} b_j e_{n-j} \tag{1}$$

で表される。

ここで

$\{x_n\}$：定常エルゴード的正規過程 $x(t)$ の標本時系列 $(n = 1,2,\cdots,N,\cdots)$

$\{e_n\}$：平均値 0、分散 ${\sigma_e}^2$ の正規性白色雑音

である。

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_p z^{-p}$$
$$B(z) = 1 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_q z^{-q}$$

で与えられる $A(z), B(z)$ は既約で定常条件、可逆条件、強正実条件を満たすものとする。

なお、式 (1) は一般的には ARMAX（Autoregressive Moving Average with exogenous input）モデル

$$\begin{aligned} & x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_p x_{n-p} \\ & = c_1 u_{n-1} + \cdots + c_m u_{n-m} + e_n + b_1 e_{n-1} + \cdots + b_q e_{n-q} \end{aligned} \tag{2}$$

における制御入力を受けないシステムのモデルと言い換えることができる。

式 (1) のパラメータ $\{a_i\},\{b_j\}$ の推定に際しては、右辺そのものが有色雑音となっており、通常の最小二乗法を用いてもバイアスのかかった推定値となる。推定値がバイアスを持たないようにするため、拡大最小二乗法、一般化最小二乗法、逐次拡大最小二乗法、逐次最尤法、補助変数法、Gauss-Newton 法、擬似線形回帰法などがある [1]-[6]。

本論文では逐次拡大最小二乗法（Recursive Extended Least Square Method：RELS 法）の改善について述べる。

一般の時系列データは制御入力を受けないシステムである場合も多く、本論文ではその場合についての推定時の計算時間短縮法等について、次のような視点で改善を図る。RELS 法においてモデルの構造的な前提からくる a priori knowledge を活用することによって、繰り返し各回の計算時間の短縮がなされるとともに収束も早くなることにより、トータルな計算時間の短縮化が図られる。計算時間の短縮については、例えば中村・大石 [7] では一般化最小二乗法を用いたものを提案している。そこでは入力、出力およびノイズのある系を対象としている。

上記のような関連するテーマのものはあっても、本論文のようなモデルの構造的な特性に着目したアプローチ・内容のものは存在しない。以下、2 章ではモデルの構造的な特性を明確にするため、3 章で述べる準備として、相互相関関数を活用した ARMA モデルのパラメータ推定方法について述べる。3 章では RELS 法の改善方法について提案する。4 章でまとめを示す。

2．相互相関関数を活用した ARMAX モデルのパラメータ推定

$\{x_i\}$ の自己相関関数は、定義により

$$R_k = E[x_n x_{n+k}] \tag{3}$$

$$R_{-k} = R_k \tag{4}$$

である。また、$\{x_i\}$ と $\{e_j\}$ の相互相関関数は $\{e_j\}$ が白色雑音であるから、$l>0$ に対し

$$\left.\begin{aligned} T_{ex}(l) &= E[e_n x_{n+l}] = T_l \\ T_{xe}(l) &= E[x_n e_{n+l}] = 0 \\ T_{ex}(-l) &= E[e_n x_{n-l}] = 0 \\ T_{xe}(-l) &= E[x_n e_{n-l}] = T_l \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

となる。また

$$E[e_k e_l] = \begin{cases} \sigma_e{}^2 : k = l \\ 0 : k \neq l \end{cases} \tag{6}$$

である。なお、有限個のデータで実際に計算すると、$E[x_n e_{n+l}]\ (l>0)$ のように本来は無相関で理論的には 0 であるはずのものが、0 でない値を持つことがある。これを

$$\left.\begin{aligned} T_{xe}(l) &= E[x_n e_{n+l}] = T_{-l} \quad (\cong 0) \\ T_{ex}(-l) &= E[e_n x_{n-l}] = T_{-l} \quad (\cong 0) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$E[e_k e_{k+l}] = E[e_{k+l} e_k] = S_l \quad (\cong 0) \tag{8}$$

のように表すことにする。また、上記式 (6),(8) の表記に合わせ

$$E[e_k{}^2] = \sigma_e{}^2 = S_o$$

と表すことにする。

現代制御理論において、系の状態空間表現を行い、ARMA 過程表現に落とし込むと、$q \le p$ となることは周知である [8]。以下、簡単のため $p = q$ とする。

式 (1) を

$$x_n = -\sum_{i=1}^{p} a_i x_{n-i} + \sum_{i=1}^{p} b_j e_{n-j} + e_n \tag{9}$$

と書き直し、ベクトルを以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z}_n &= [-x_{n-1}, \cdots, -x_{n-p}, e_{n-1}, \cdots, e_{n-p}]^T \\ &= [-\boldsymbol{x}_n{}^T, \boldsymbol{e}_n{}^T]^T \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &= [a_1, a_2, \cdots, a_p, b_1, b_2, \cdots, b_p]^T \\ &= [\boldsymbol{a}^T, \boldsymbol{b}^T]^T \end{aligned} \tag{11}$$

式 (9) は

$$x_n = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{Z}_n + e_n \tag{12}$$

と表せる。ここで

$$I_N = \sum_{n=1}^{N} \left[x_n - \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{Z}_n \right]^2 \tag{13}$$

を最小にするパラメータ $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ を求める。最小二乗推定は

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \left[\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{Z}_n \boldsymbol{Z}_n{}^T \right]^{-1} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{Z}_n x_n \tag{14}$$

で与えられる。ここで $N \to \infty$ とすると、式 (14) の右辺は各々 x_i と e_j との相互相関関数で記述でき、

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & -\boldsymbol{T} \\ -\boldsymbol{T}^T & \sigma_e{}^2 \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{t} \end{bmatrix} \tag{15}$$

となる。ここで

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} R_0, & R_1, & \cdots, & R_{p-1} \\ R_1, & R_0, & \cdots, & R_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{p-1}, & R_{p-2}, & \cdots, & R_0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} T_0, & T_1, & \cdots, & T_{p-1} \\ 0, & T_0, & \cdots, & T_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots, & T_0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r} = \left[R_1, \quad R_2, \quad \cdots, \quad R_p \right]^T$$

$$\boldsymbol{t} = \left[T_1, \quad T_2, \quad \cdots, \quad T_p \right]^T$$

である。式 (15) を書き直すと、

$$\boldsymbol{Ra} - \boldsymbol{Tb} = -\boldsymbol{r} \tag{16}$$

$$-\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{a} + \sigma_e{}^2 \boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \tag{17}$$

となる。式 (17) より、

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{\sigma_e{}^2} \left(\boldsymbol{t} + \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{a} \right) \tag{18}$$

が得られるが、これを式 (16) へ代入することにより

$$\boldsymbol{a} = \left(\boldsymbol{R} - \frac{1}{\sigma_e{}^2} \boldsymbol{TT}^T \right)^{-1} \left(\frac{1}{\sigma_e{}^2} \boldsymbol{Tt} - \boldsymbol{r} \right) \tag{19}$$

が得られる。これを式 (18) に代入して $\boldsymbol{b}$ が求められる。パラメータ推定の全体のアルゴリズムは、表 1 のようなものが考えられ、収束の判定は

$$D^{(l)}=\sum_{i=1}^{p}\left(\left|\frac{\hat{a}_i^{(l)}-\hat{a}_i^{(l-1)}}{\hat{a}_i^{(l-1)}}\right|+\left|\frac{\hat{b}_i^{(l)}-\hat{b}_i^{(l-1)}}{\hat{b}_i^{(l-1)}}\right|\right) \tag{20}$$

表 1.　パラメータ推定の全体アルゴリズム

ステップ 1	：	観測データ $\{x_n\}$ から自己相関関数 $\{\hat{R}_k\}$ を計算する
ステップ 2	：	正規性白色雑音を発生させ、$\{e_n\}$ の初期値とする
ステップ 3	：	$\{\hat{T}_k\}$ を計算する
ステップ 4	：	式 (18),(19) より $\hat{\boldsymbol{a}}^{(l)},\hat{\boldsymbol{b}}^{(l)}$ を推定する
ステップ 5	：	式 (9) より $\{e_n\}$ を推定する
ステップ 7	：	ステップ 3,4,5 を $\hat{\boldsymbol{a}}^{(l)},\hat{\boldsymbol{b}}^{(l)}$ が収束するまで繰り返す

において

$$D^{(l)}<\varepsilon \tag{21}$$

が m 回連続で成立したときとする。

T は上三角行列のため、その性質を利用して計算時間の短縮が可能となる。従来の方法であれば、**T** の全成分が埋まった形でパラメータ推定計算がなされるが、ここでは構造的な前提からくる a priori knowledge を活用することによって

- 解のロバスト性
- 計算時間の短縮

が期待できる。なお、式 (7),(8) を用いた場合、式 (15) に相当するものは次のようになる。

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R} & -\overline{\boldsymbol{T}}\\ -\overline{\boldsymbol{T}}^T & \boldsymbol{S}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{t}\end{bmatrix} \tag{22}$$

となる。ただし、

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}R_0, & R_1, & \cdots, & R_{p-1}\\ R_1, & R_0, & \cdots, & R_{p-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ R_{p-1}, & R_{p-2}, & \cdots, & R_0\end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{T}}=\begin{bmatrix}T_0, & T_1, & \cdots, & T_{p-1}\\ T_{-1}, & T_0, & \cdots, & T_{p-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ T_{-(p-1)}, & T_{-(p-2)}, & \cdots, & T_0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}S_0, & S_1, & \cdots, & S_{p-1}\\ S_1, & S_0, & \cdots, & S_{p-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ S_{p-1}, & S_{p-2}, & \cdots, & S_0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r} = \left[R_1,\quad R_2,\quad \cdots,\quad R_p\right]^T$$

$$\boldsymbol{t} = \left[T_1,\quad T_2,\quad \cdots,\quad T_p\right]^T$$

である。これを書き直すと

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{a} - \overline{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{r} \tag{23}$$

$$-\overline{\boldsymbol{T}}^T\boldsymbol{a} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \tag{24}$$

となる。式 (24) より

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{S}^{-1}\left(\boldsymbol{t} + \overline{\boldsymbol{T}}^T\boldsymbol{a}\right) \tag{25}$$

が得られるが、これを式 (23) へ代入すると

$$\boldsymbol{a} = \left(\boldsymbol{R} - \overline{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{S}^{-1}\overline{\boldsymbol{T}}^T\right)^{-1}\left(\overline{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{t} - \boldsymbol{r}\right) \tag{26}$$

が得られる。これを式 (25) に代入して $\boldsymbol{b}$ が計算できる。

3．改定 RELS 法について

データが N 個得られており、$N+1$ 個目のデータが得られたとき、

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1} &= \left[\sum_{n=1}^{N+1}\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{Z}_n^T\right]^{-1}\sum_{n=1}^{N+1}\boldsymbol{Z}_n x_n \\ &= \left[\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{Z}_n^T + \boldsymbol{Z}_N\boldsymbol{Z}_{N+1}^T\right]^{-1}\left(\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{Z}_n x_n + \boldsymbol{Z}_{N+1}x_{N+1}\right) \end{aligned} \tag{27}$$

ここで

$$\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{Z}_n^T = \boldsymbol{A}_N \tag{28}$$

とおくと

$$\left(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}'\right)^{-1} = \boldsymbol{Q}^{-1} - \frac{\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}'\boldsymbol{Q}^{-1}}{1 + \boldsymbol{R}'\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{R}} \tag{29}$$

$$\left(\boldsymbol{Q} : n \times n, \boldsymbol{R} : n \times 1, \boldsymbol{R}' : 1 \times n\right)$$

の公式を用いて

$$\boldsymbol{A}_{N+1}^{-1} = \boldsymbol{A}_N^{-1} - \frac{\boldsymbol{A}_N^{-1}\boldsymbol{Z}_{N+1}\boldsymbol{Z}_{N+1}^T\boldsymbol{A}_N^{-1}}{1 + \boldsymbol{Z}_{N+1}^T\boldsymbol{A}_N^{-1}\boldsymbol{Z}_{N+1}} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1} &= \left(\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{A}_N^{-1}\boldsymbol{Z}_{N+1}\boldsymbol{Z}_{N+1}^T}{1 + \boldsymbol{Z}_{N+1}^T\boldsymbol{A}_N^{-1}\boldsymbol{Z}_{N+1}}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}_N + \frac{\boldsymbol{A}_N^{-1}\boldsymbol{Z}_{N+1}x_{N+1}}{1 + \boldsymbol{Z}_{N+1}^T\boldsymbol{A}_N^{-1}\boldsymbol{Z}_{N+1}} \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_N + \frac{\boldsymbol{A}_N^{-1}\boldsymbol{Z}_{N+1}}{1 + \boldsymbol{Z}_{N+1}^T\boldsymbol{A}_N^{-1}\boldsymbol{Z}_{N+1}}\left(x_{N+1} - \boldsymbol{Z}_{N+1}^T\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right) \end{aligned} \tag{31}$$

を得る。$\{x_i\}$ は与えられているが、$\{e_i\}$ は未知のため、上式は $\{e_i\}$ を推定したものを入れて計算していく必要がある。

式 (12) に $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ を代入すると、$\hat{e}_N$ が得られるので

$$\hat{e}_{N+1} = x_{N+1} - \boldsymbol{Z}_{N+1}^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_N \tag{32}$$

とおく。また

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{Z}}_N &= \left[-x_{N-1},\cdots,-x_{N-p},\hat{e}_{N-1},\cdots,\hat{e}_{N-p}\right]^T \\ &= \left[-\boldsymbol{X}_N^T,\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^T\right]^T\end{aligned} \tag{33}$$

とすると、式 (31) は

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_N + \frac{\boldsymbol{A}_N^{-1}\boldsymbol{Z}_{N+1}}{1+\boldsymbol{Z}_{N+1}^T\boldsymbol{A}_N^{-1}\boldsymbol{Z}_{N+1}}\hat{e}_N \tag{34}$$

$$= \left(\boldsymbol{I} - \frac{\overline{\boldsymbol{A}}_N^{-1}\boldsymbol{Z}_{N+1}\overline{\boldsymbol{Z}}_{N+1}^T}{1+\overline{\boldsymbol{Z}}_{N+1}^T\overline{\boldsymbol{A}}_N^{-1}\overline{\boldsymbol{Z}}_{N+1}}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}_N + \frac{\overline{\boldsymbol{A}}_N^{-1}\overline{\boldsymbol{Z}}_{N+1}x_{N+1}}{1+\overline{\boldsymbol{Z}}_{N+1}^T\overline{\boldsymbol{A}}_N\overline{\boldsymbol{Z}}_{N+1}} \tag{35}$$

となる。ここで

$$\overline{\boldsymbol{A}}_N = \sum_{n=1}^{N}\overline{\boldsymbol{Z}}_n\overline{\boldsymbol{Z}}_n^T \tag{36}$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}_{N+1}^{-1} = \overline{\boldsymbol{A}}_N^{-1} - \frac{\overline{\boldsymbol{A}}_N^{-1}\overline{\boldsymbol{Z}}_{N+1}\overline{\boldsymbol{Z}}_{N+1}^T\overline{\boldsymbol{A}}_N^{-1}}{1+\overline{\boldsymbol{Z}}_{N+1}^T\overline{\boldsymbol{A}}_N^{-1}\overline{\boldsymbol{Z}}_{N+1}} \tag{37}$$

である。ここで以下、2. で考察した関係を導入することにする。式 (35) 及び式 (37) の $\overline{Z}_{N+1}\ \overline{Z}_{N+1}{}^T$ に着目し、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_{N+1} &= \overline{\boldsymbol{Z}}_{N+1}\overline{\boldsymbol{Z}}_{N+1}^T \\ &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{N+1} \\ \hat{\boldsymbol{e}}_{N+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{N+1}^T, & \hat{\boldsymbol{e}}_{N+1}^T\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{N+1}\boldsymbol{X}_{N+1}^T, & -\boldsymbol{X}_{N+1}\hat{e}_{N+1}^T \\ -\hat{e}_{N+1}\boldsymbol{X}_{N+1}^T, & \hat{e}_{N+1}\hat{e}_{N+1}^T\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{N+1}, & -\boldsymbol{T}_{N+1} \\ -\boldsymbol{T}_{N+1}^T, & \boldsymbol{S}_{N+1}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{N-1}^2, & x_{N-1}x_{N-2}, & \cdots, & x_{N-1}x_{N-p}, & -x_{N-1}\hat{e}_{N-1}, & -x_{N-1}\hat{e}_{N-2}, & \cdots, & -x_{N-1}\hat{e}_{N-p} \\ x_{N-2}x_{N-1}, & x_{N-2}^2, & \cdots, & x_{N-2}x_{N-p}, & -x_{N-2}\hat{e}_{N-1}, & -x_{N-2}\hat{e}_{N-2}, & \cdots, & -x_{N-2}\hat{e}_{N-p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{N-p}x_{N-1}, & x_{N-p}x_{N-2}, & \cdots, & x_{N-p}^2, & -x_{N-p}\hat{e}_{N-1}, & -x_{N-p}\hat{e}_{N-2}, & \cdots, & -x_{N-p}\hat{e}_{N-p} \\ -\hat{e}_{N-1}x_{N-1}, & -\hat{e}_{N-1}x_{N-2}, & \cdots, & -\hat{e}_{N-1}x_{N-p}, & \hat{e}_{N-1}^2, & \hat{e}_{N-1}\hat{e}_{N-2}, & \cdots, & \hat{e}_{N-1}\hat{e}_{N-p} \\ -\hat{e}_{N-2}x_{N-1}, & -\hat{e}_{N-2}x_{N-2}, & \cdots, & -\hat{e}_{N-2}x_{N-p}, & \hat{e}_{N-1}\hat{e}_{N-2}, & \hat{e}_{N-2}^2, & \cdots, & \hat{e}_{N-2}\hat{e}_{N-p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\hat{e}_{N-p}x_{N-1}, & -\hat{e}_{N-p}x_{N-2}, & \cdots, & -\hat{e}_{N-p}x_{N-p}, & \hat{e}_{N-p}\hat{e}_{N-1}, & \hat{e}_{N-p}\hat{e}_{N-2}, & \cdots, & \hat{e}_{N-p}^2 \end{bmatrix} \tag{38}$$

を得る。これに 2. と同様な関係を導入することにより

$$\overline{\boldsymbol{U}}_{N+1} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{N+1}, & -\overline{\boldsymbol{T}}_{N+1} \\ -\overline{\boldsymbol{T}}_{N+1}^T, & \overline{\boldsymbol{S}}_{N+1}\end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
x_{N-1}^2, & x_{N-1}x_{N-2}, & \cdots, & x_{N-1}x_{N-p}, & -x_{N-1}\hat{e}_{N-1}, & -x_{N-1}\hat{e}_{N-2}, & \cdots, & -x_{N-1}\hat{e}_{N-p} \\
x_{N-2}x_{N-1}, & x_{N-2}^2, & \cdots, & x_{N-2}x_{N-p}, & 0, & -x_{N-2}\hat{e}_{N-2}, & \cdots, & -x_{N-2}\hat{e}_{N-p} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_{N-p}x_{N-1}, & x_{N-p}x_{N-2}, & \cdots, & x_{N-p}^2, & 0, & 0, & \cdots, & -x_{N-p}\hat{e}_{N-p} \\
-\hat{e}_{N-1}x_{N-1}, & 0, & \cdots, & 0, & \hat{e}_{N-1}^2, & 0, & \cdots, & 0 \\
-\hat{e}_{N-2}x_{N-1}, & -\hat{e}_{N-2}x_{N-2}, & \cdots, & 0, & 0, & \hat{e}_{N-2}^2, & \cdots, & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-\hat{e}_{N-p}x_{N-1}, & -\hat{e}_{N-p}x_{N-2}, & \cdots, & -\hat{e}_{N-p}x_{N-p}, & 0, & 0, & \cdots, & \hat{e}_{N-p}^2
\end{bmatrix} \tag{39}
$$

を$\boldsymbol{U}_{N+1}$の代わりに用いることを考える。この方式を用いたθ_Nの推定値を$\overline{\boldsymbol{\theta}}_N$とすれば、

$$
\overline{\boldsymbol{\theta}}_{N+1} = \left(\boldsymbol{I} - \frac{\overline{\boldsymbol{A}}_N^{-1}\overline{\boldsymbol{U}}_{N+1}}{1+\overline{\boldsymbol{Z}}_{N+1}^T\overline{\boldsymbol{A}}_N^{-1}\overline{\boldsymbol{Z}}_{N+1}} \right)\overline{\boldsymbol{\theta}}_N + \frac{\boldsymbol{A}_N^{-1}\overline{\boldsymbol{U}}_{N+1}}{1+\overline{\boldsymbol{Z}}_{N+1}^T\overline{\boldsymbol{A}}_N\overline{\boldsymbol{Z}}_{N+1}} \tag{40}
$$

ここで

$$
\overline{\boldsymbol{A}}_N = \sum_{n=1}^{N} \overline{\boldsymbol{Z}}_n \overline{\boldsymbol{Z}}_n^T \tag{41}
$$

$$
\overline{\boldsymbol{A}}_{N+1}^{-1} = \overline{\boldsymbol{A}}_N^{-1} - \frac{\overline{\boldsymbol{A}}_N^{-1}\overline{\boldsymbol{U}}_{N+1}\overline{\boldsymbol{A}}_N^{-1}}{1+\overline{\boldsymbol{Z}}_{N+1}^T\overline{\boldsymbol{A}}_N^{-1}\overline{\boldsymbol{Z}}_{N+1}} \tag{42}
$$

となる。従来法では$\boldsymbol{T}_{N+1}$、$\boldsymbol{S}_{N+1}$は Full Matrix であるのに対し、提案手法では各々上三角行列、対角行列からくる a priori knowledge を活用することにより、繰り返し各回の計算時間の短縮がなされるとともに、収束も早くなり、トータルな計算時間の短縮化が図られる。

4．おわりに

本論文では制御入力を受けない ARMA モデルにおいて、RELS 法の改善を行った。モデルの構造的な前提からくる a priori knowledge を活用することによって繰り返し各回の計算時間の短縮がなされるとともに、収束も早くなることにより、トータルな計算時間の短縮化が図られる。今後は様々なケースで検証することの他、ARIMA モデルなどにも本手法を適用し、適用範囲の拡大を図っていきたく考えている。

参考文献

[1] 得丸英勝、添田喬、中溝高好、秋月影雄；計数・測定、培風館、1982.

[2] 相良節夫、秋月影雄、中溝高好、片山徹；システム同定、計測自動制御学会、1987.

[3] G.E. Box, G.M. Jenkins: Time series analysis third edition, Prentice Hall, 1994.

[4] T. S¨oderstr¨om: An efficient and versatile algorithm for computing the covariance function of an ARMA process, IEEE Trans on Signal Processing, Vol.46, No.6, pp.1591–1600, 1998.

[5] X. Zhang, H. Takeda: An approach to time series analysis and ARMA spectral estimation, IEEE Trans. on Acoustics, Speech & Signal Processing, Vol.35, No.9, pp.1303–1313, 1987.

[6] 片山徹；システム同定入門、朝倉書店、1994.

[7] 中村政俊，大石泰彦：計算時間の短縮を図った一般化最小二乗法の推定アルゴリズム，計測自動制御学会論文誌，Vol.20, No.6, pp.471–478, 1984.

[8] 得丸英勝、竹安数博“離散時間線系モデルのあてはめによるスペクトル密度の推定”計測自動制御学会論文誌、Vol.13, No.2, pp.148-153,1977.